Universität Duisburg-Essen Fakultät für Mathematik

Bachelorarbeit

Auflösung von Singularitäten für Kurven

Katharina Pohl

26. September 2018

Matrikelnummer: 3030123
Emailadresse: katharina.pohl.96@stud.uni-due.de
Postadresse: I. Weberstraße 15, 45127 Essen
Studiengang: Wirtschaftsmathematik, B. Sc., 6. Fachsemester
Abgabefrist: 10. Oktober 2018
Erstgutachter: Prof. Dr. Jan Kohlhaase
Zweitgutachter: Prof. Dr. Jochen Heinloth

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel dieser Bachelorarbeit ist der Beweis, dass jedes integre, eindimensionale Schema von endlichem Typ über einem Körper K, eine sogenannte Kurve, eine Auflösung von Singularitäten besitzt. Dazu werden wir zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Schemata und Schemamorphismen einführen und diskutieren. Weiter werden *reguläre* bzw. *singuläre* Schemata definiert, untersucht und veranschaulicht. Wir werden den Begriff eines *integren* Schemas und eines *birationalen*, *eigentlichen* sowie *endlichen* Morphismus von Schemata kennenlernen. Zuletzt wird die Definition einer *Auflösung von Singularitäten* folgen, welche wir in dieser Arbeit genauer untersuchen werden. Aufbauend auf den Grundlagen werden wir den Begriff einer *Normalisierung* einführen und zeigen, dass jedes integre Schema eine bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutige Normalisierung besitzt. Anschließend werden wir in einzelnen Schritten beweisen, dass die Normalisierung eines integren, eindimensionalen K-Schemas von endlichem Typ eine Auflösung von Singularitäten ist. Dafür wird u.a. der Zusammenhang zwischen den Begriffen *normal* und *regulär* untersucht. Im letzten Kapitel werden wir einige Beispiele von Auflösungen von Singularitäten für Kurven betrachten. Insgesamt orientieren sich die Ausführungen eng an den Büchern [GW10] und [Liu02].
Generell ist die Auflösung von Singularitäten eine zentrale Fragestellung der Algebraischen Geometrie, die wir hier nur für Kurven beantworten werden. In höheren Dimensionen ist die Auflösung von Singularitäten für $char(K) > 0$ noch ein offenes Problem.

In der folgenden Arbeit sei stets K ein Körper.

2 Grundlagen

An dieser Stelle sollen einige grundlegende Definitionen eingeführt und diskutiert werden, auf denen in den folgenden Kapiteln aufgebaut wird. Viele grundlegende Begriffe und Ergebnisse der algebraischen Geometrie werden dabei allerdings als bekannt vorausgesetzt.

Zunächst betrachten wir ein lokal noethersches Schema X und bezeichne mit $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$. Über $(r + \mathfrak{m}_x)(x + \mathfrak{m}_x^2) := rx + \mathfrak{m}_x^2$ für alle $r \in \mathcal{O}_{X,x}$ und alle $x \in \mathfrak{m}_x$ wird $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ in natürlicher Weise zu einem Vektorraum über dem Restklassenkörper $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ von x.
Damit können wir den Begriff eines *regulären* Schemas wie folgt definieren:

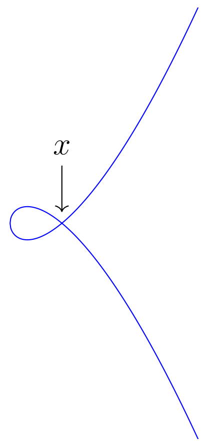
Definition 2.1
Sei X ein lokal noethersches Schema und $x \in X$.

- x heißt regulär, falls $dim_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = dim(\mathcal{O}_{X,x})$.
- X heißt regulär, falls alle Punkte $x \in X$ regulär sind.
- x heißt singulär, falls $dim_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) > dim(\mathcal{O}_{X,x})$.
- X heißt singulär, falls X nicht regulär ist.

Bemerkung 2.2. Ist X lokal noethersch, so existiert per Definition eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $X_i = Spec(R_i)$ für alle $i \in I$, sodass die R_i, $i \in I$, noethersch sind. Dann sind für alle $x \in X$ die Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ noethersch als Lokalisierungen der R_i.
Außerdem gilt für alle $x \in X$ stets $dim(\mathcal{O}_{X,x}) \leq dim_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$ (vgl. [Liu02, 2.5.14(b)]). Dieser Wert ist stets endlich, denn $\mathcal{O}_{X,x}$ ist noethersch, sodass $\mathfrak{m}_x$ ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Die Restklassen bilden dann ein Erzeugendensystem des $\kappa(x)$-Vektorraums $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Bemerkung 2.3. Aus der Dimensionsabschätzung in Bemerkung 2.2 folgt für jeden Punkt eines Schemas, dass *singulär* äquivalent zu *nicht regulär* ist.
Anschaulich sind die regulären Punkte wie in der Analysis die Punkte, an denen das Schema glatt ist, also einen wohldefinierten Tangentialraum besitzt.

In der folgenden Grafik ist beispielsweise x der einzige singuläre Punkt der Kurve. Alle anderen Punkte sind regulär und besitzen einen wohldefinierten Tangentialraum.



(1)

Definition 2.4
Ein Schema X heißt integer, falls X irreduzibel und reduziert ist.

Bemerkung 2.5. Ist ein Schema X integer, so ist jedes offene Unterschema $\emptyset \neq U \subseteq X$ ebenfalls integer.

Beweis. Zunächst ist U als offenes Unterschema von X nach [GW10, 1.15] wieder irreduzibel.
Da X reduziert ist, gilt für alle $x \in X$, dass $\mathcal{O}_{X,x}$ ein reduzierter Ring ist. Aus der Isomorphie $\mathcal{O}_{X,u} \cong \mathcal{O}_{U,u}$ für alle $u \in U$ folgt dann, dass auch U reduziert ist. □

Bemerkung 2.6. Ist X integer, so gilt für alle $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen, dass $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich ist. Auch $\mathcal{O}_{X,x}$ ist für alle $x \in X$ ein Integritätsbereich.

Beweis. Zunächst ist $\mathcal{O}_X(U) \neq 0$, denn wegen $U \neq \emptyset$ existiert $x \in U$, und $\mathcal{O}_X(U)$ besitzt einen Ringhomomorphismus in den lokalen (und daher von 0 verschiedenen) Ring $\mathcal{O}_{X,x}$. Folglich gilt $1 \neq 0$ in $\mathcal{O}_X(U)$.
Seien nun $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $fg = 0$. Dann gilt $U = V(0) = V(fg) = V(f) \cup V(g)$ und da U nach Bem. 2.5 irreduzibel ist, können wir o.B.d.A. $U = V(f)$ annehmen und zeigen, dass $f = 0$ gilt. Aufgrund der Garbeneigenschaften können wir dies lokal prüfen. Sei deshalb o.B.d.A. $U = Spec(R)$ affin. Dann gilt wegen $U = V(f) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | (f) \subseteq \mathfrak{p}\}$, dass $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mathfrak{p} = Rad(0)$ in R. Da U nach Bem. 2.5 reduziert ist, gilt $Rad(0) = 0$. Damit gilt $f = 0$.

Dass auch $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ ein Integritätsbereich ist, folgt analog aus obiger Argumentation, indem U als affine, offene Umgebung von x gewählt wird. Dann ist nämlich $\mathcal{O}_{X,x}$ eine Lokalisierung des Integritätsbereichs $\mathcal{O}_X(U)$ an einem Primideal. $\square$

Definition 2.7
Ein Punkt x in einem topologischen Raum X heißt generischer Punkt von X, wenn für alle $z \in X$ mit $x \in \overline{\{z\}}$ schon $z = x$ folgt.

Bemerkung 2.8. Bekanntlich ist für jedes Schema X durch $x \mapsto \overline{\{x\}}$ eine Bijektion zwischen den generischen Punkten und den irreduziblen Komponenten von X gegeben. Insbesondere besitzt jedes irreduzible Schema einen eindeutig bestimmten generischen Punkt.

Definition 2.9
Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt dominant, falls $f(X)$ dicht in Y ist.

Bemerkung 2.10. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus irreduzibler Schemata. Ist η der generische Punkt von X und ϑ der generische Punkt von Y, so sind äquivalent:
(i) f ist dominant
(ii) $f(\eta) = \vartheta$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\{\eta\} = \bigcap_{\substack{\emptyset \neq U \subseteq X \\ offen}} U$.
Aus $\overline{\{\eta\}} = X$ folgt, dass $\eta \in U$ für alle $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen gilt. Das zeigt „ $\subseteq$ “.
Für die andere Inklusion betrachte $\zeta \in \bigcap_{\substack{\emptyset \neq U \subseteq X \\ offen}} U$. Dann gilt $\overline{\{\zeta\}} = X \ni \eta$ und damit folgt $\zeta = \eta$, da η generischer Punkt ist.
Betrachte nun die zu zeigende Äquivalenz. Sei $f : X \to Y$ dominant. Ist $\emptyset \neq V \subseteq Y$ offen, so gilt $V \cap f(X) \neq \emptyset$ und damit $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Folglich ist $\eta \in f^{-1}(V)$. Da dies für alle $V \subseteq Y$ offen gilt, erhalten wir $\eta \in \bigcap_{\substack{\emptyset \neq V \subseteq Y \\ offen}} f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcap_{\substack{\emptyset \neq V \subseteq Y \\ offen}} V) = f^{-1}(\{\vartheta\})$ und damit $f(\eta) = \vartheta$. Für die Rückrichtung betrachte $\vartheta = f(\eta) \subseteq f(U)$. Damit gilt $Y = \overline{\{\vartheta\}} \subseteq \overline{f(X)} \subseteq Y$, also $\overline{f(X)} = Y$ und damit ist f dominant. $\square$

Bemerkung 2.11. Ist X ein integres Schema und bezeichnet $\eta \in X$ den generischen Punkt von X, so ist $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein Körper.

Beweis. Für ein affines, offenes Unterschema $\emptyset \neq U = Spec(A) \subseteq X$ gilt nach Bemerkung 2.5, dass auch U integer ist. Die Eigenschaft $\overline{\{\eta\}} = X$ des generischen Punktes impliziert, dass $\eta \in U$. Aus der Irreduzibilität von U folgt nun, dass η auch der generische Punkt von U ist. Mit der Isomorphie $\mathcal{O}_{X,\eta} \cong \mathcal{O}_{U,\eta}$ genügt es, $\mathcal{O}_{U,\eta}$ zu betrachten.

Da U integer ist, ist $A = \mathcal{O}_U(U)$ nach Bem. 2.6 ein Integritätsbereich. Folglich ist $\eta = 0$ das Nullideal von A. Damit gilt, dass $\mathcal{O}_{U,\eta} \cong A(A\backslash 0)^{-1} = Quot(A)$ und $\mathcal{O}_{U,\eta}$ ist ein Körper. $\square$

Definition 2.12

Für den generischen Punkt η eines integren K-Schemas X heißt $K(X) := \mathcal{O}_{X,\eta}$ der Funktionenkörper von X.

Beispiel 2.13

Der projektive Raum $\mathbb{P}^n_K = Proj(K[x_0, ..., x_n])$ über einem Körper K in n Variablen besitzt den generischen Punkt $0 \in Proj(K[x_0, ..., x_n])$ mit $K(\mathbb{P}^n_K) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K,0} \cong K[x_0, ..., x_n]_{(0)}$ $= \{\frac{f}{g} | g \neq 0$ und f, g homogen vom selben Grad $\} \cong K(\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i})$ für alle $0 \leq i \leq n$.

Definition 2.14

Sind X und Y integre Schemata, so heißt ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata birational (auch: birationale Äquivalenz), falls

1. $f(\eta) = \vartheta$, wobei η den generischen Punkt von X und ϑ den generischen Punkt von Y bezeichnen.

2. der Ringhomomorphismus $f^\#_\eta : K(Y) = \mathcal{O}_{Y,f(\eta)} \to \mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)$ bijektiv ist.

Bemerkung 2.15. Sind X und Y integre Schemata von endlichem Typ über einem Körper K, so sind äquivalent:
(i) $f : X \to Y$ ist birational.
(ii) Es gibt affine, offene Unterschemata $\emptyset \neq U \subseteq X$, $\emptyset \neq V \subseteq X$, sodass sich f zu einem Isomorphismus $f : U \to V$ einschränkt.

Beweis. (vgl. [GW10, 6.17])
„$\Rightarrow$“ O.B.d.A. seien $X = Spec(B)$ und $Y = Spec(A)$ affin und A, B von endlichem Typ über K. Dann sind $\{0\} \subseteq B$ bzw. $\{0\} \subseteq A$ das Primideal korrespondierend zu η bzw. $f(\eta)$. Nach Eigenschaft (ii) der birationalen Abbildung f ist $\varphi := f^\#_\eta : K(Y) = \mathcal{O}_{Y,f(\eta)} \to \mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)$ bijektiv. Außerdem ist nach dem Beweis von Bem. 2.11 $K(X) \cong Quot(\mathcal{O}_X(X)) = Quot(B)$ und analog $K(Y) \cong Quot(\mathcal{O}_Y(Y)) = Quot(A)$. Wir schreiben die K-Algebra von endlichem Typ A als $A = K[a_1, ..., a_r]$ und $\varphi(a_i) = \frac{b_i}{g_i}$ für $b_i \in B, g_i \in B\backslash\{0\}$ für alle $1 \leq i \leq r$. Definieren wir $g := g_1 \cdot ... \cdot g_r \in B\backslash\{0\}$, so erhalten wir mit $\varphi(a_i) = \frac{b_i \cdot \prod_{i \neq j} g_j}{g} \in B_g$, dass $\varphi(A) \subseteq B_g \subseteq Quot(B) = K(X)$. Analog können wir unter Verwendung der Bijektivität von φ ein Element $h \in A\backslash\{0\}$ konstruieren,

sodass $B_g \subseteq \varphi(A_h)$ gilt. Aufgrund der Inklusion $\varphi(A) \subseteq B_g$ kann das Element $\varphi(h)$ als $\varphi(h) = \frac{b}{g^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b \in B\backslash\{0\}$ geschrieben werden und es gilt $\varphi(A_h) = B_b$. Das zeigt, dass sich f zu einem Isomorphismus $U := D(b) \to D(h) =: V$ zwischen affinen, offenen Unterschemata einschränkt.

„$\Leftarrow$" Sei nun $f : X \to Y$ ein Morphismus mit der Eigenschaft, dass affine, offene Unterschemata $\emptyset \neq U \subseteq X$, $\emptyset \neq V \subseteq X$ existieren mit $f(U) \subseteq V$, sodass $f : U \to V$ ein Isomorphismus ist. Aus der Irreduzibilität von Y folgt, dass $V \supseteq f(U)$ in Y dicht liegt und damit auch $f(X)$. Die Bijektivität von $f_\eta^\#$ folgt unmittelbar daraus, dass $f : U \to V$ ein Isomorphismus ist. $\square$

Definition 2.16

Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt

- lokal von endlichem Typ, falls für alle Punkte $x \in X$ affine, offene Umgebungen $x \in U_x \subseteq X$ und $f(x) \in V_x \subseteq Y$ existieren, sodass $f(U_x) \subseteq V_x$ und sodass der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(V_x) \xrightarrow{f^\#_{V_x}} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_x)) \to \mathcal{O}_X(U_x)$ den Ring $\mathcal{O}_X(U_x)$ zu einer $\mathcal{O}_Y(V_x)$-Algebra von endlichem Typ macht.

- von endlichem Typ, falls f lokal von endlichem Typ und quasi-kompakt ist (d.h. Urbilder quasi-kompakter offener Mengen sind wieder quasi-kompakt).

- separabel, falls die Diagonale $\Delta : X \to X \times_Y X$ von f eine abgeschlossene Immersion ist.

- abgeschlossen, falls für alle $Z \subseteq X$ abgeschlossen das Bild $f(Z) \subseteq Y$ abgeschlossen in Y ist.

- universell abgeschlossen, falls der Morphismus $f \times id_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y \times_Y Y' \cong Y'$ abgeschlossen ist für alle Y-Schemata $Y' \to Y$.

- eigentlich, wenn f von endlichem Typ, separabel und universell abgeschlossen ist.

- affin, falls $Y = \bigcup_{i\in I} Spec(R_i)$ existiert, sodass $f^{-1}(Spec(R_i)) = Spec(S_i)$ für alle $i \in I$ affin ist. Dann ist $f^{-1}(U)$ affin für jedes affine, offene Unterschema U von Y (vgl. [GW10, 12.1]).

- endlich, falls $Y = \bigcup_{i\in I} Spec(R_i)$ existiert, sodass $f^{-1}(Spec(R_i)) = Spec(S_i)$ für alle $i \in I$ affin ist und sodass der Ringhomomorphismus $f_i^\# : R_i \to S_i$ endlich ist, d.h. er macht S_i zu einem endlich erzeugten R_i-Modul (äquivalent zu: die Ringerweiterung $S_i | im(f_i^\#)$ ist endlich). Die entsprechende Aussage gilt dann für jede affine, offene Überdeckung von Y (vgl. [GW10, 12.9]).

Bemerkung 2.17. Für einen Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ gilt
(i) f endlich $\Rightarrow$ f eigentlich
(ii) f endlich $\Rightarrow$ f surjektiv

Beweis. (i) Sei dazu $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus. Dann ist f per Definition affin und damit separiert: Denn Separiertheit ist lokal in Y und ist $f : Spec(S) \to Spec(R)$ ein affiner Morphismus, so korrespondiert die Abbildung $\Delta : Spec(S) \to Spec(S \bigotimes_R S)$ mit dem Ringhomomorphismus $id_S \otimes id_S : S \bigotimes_R S \to S, s \otimes s' \mapsto ss'$, welcher offensichtlich surjektiv ist. Dann ist Δ eine abgeschlossene Immersion und damit f separiert.
Außerdem ist f endlich, also affin, und jeder affine Morphismus ist quasi-kompakt. Ist nämlich $U \subseteq Y$ quasi-kompakt offen, so existiert eine endliche, affine, offene Überdeckung $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ von U. Dann ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$ eine endliche Vereinigung der affinen (und daher quasi-kompakten) Schemata $f^{-1}(U_i)$ und daher selbst quasi-kompakt. Da jeder endliche Morphismus per Definition lokal von endlichem Typ ist, ist f also sogar von endlichem Typ.
Ist $h : Y' \to Y$ ein beliebiges Y-Schema, so ist $g := f \times id_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$ wieder endlich: Sei dazu $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ eine beliebige affine, offene Überdeckung von Y. Dann ist $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$ eine affine, offene Überdeckung von X, da f affin ist. Sei nun $h^{-1}(Y_i) = \bigcup_{j \in J(i)} Y'_{ij}$ für $i \in I$ eine affine, offene Überdeckung von $h^{-1}(Y_i)$. Zusammengenommen ist dann $X \times_Y Y' = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J(i)} f^{-1}(Y_i) \times_{Y_i} Y'_{ij}$ eine affine, offene Überdeckung von $X \times_Y Y'$ mit $g^{-1}(Y'_{ij}) = (f \otimes id_{Y'})^{-1}(Y'_{ij}) = f^{-1}(Y_i) \times_{Y_i} Y'_{ij}$. Daraus folgt nach [GW10, 12.1], dass g affin ist. Für die Endlichkeit von g betrachte den Ringhomomorphismus $\varphi : \mathcal{O}_{Y'}(Y'_{ij}) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y_i)) \bigotimes_{\mathcal{O}_Y(Y_i)} \mathcal{O}_{Y'}(Y'_{ij}), x \mapsto 1 \otimes x$, welche mit der Abbildung $g : f^{-1}(Y_i) \times_{Y_i} Y'_{ij} \to Y'_{ij}$ korrespondiert. Da der Morphismus f endlich ist, macht $f^\#_{Y_i} : \mathcal{O}_Y(Y_i) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y_i))$ den Ring $\mathcal{O}_X(f^{-1}(Y_i))$ zu einem endlich erzeugten Modul über $\mathcal{O}_Y(Y_i)$. Ist $y_1, ..., y_r$ ein endliches Erzeugendensystem von $\mathcal{O}_X(f^{-1}(Y_i))$ über $\mathcal{O}_Y(Y_i)$, dann ist via φ durch $y_1 \otimes 1, ..., y_r \otimes 1$ ein endliches Erzeugendensystem von $\mathcal{O}_X(f^{-1}(Y_i)) \bigotimes_{\mathcal{O}_Y(Y_i)} \mathcal{O}_{Y'}(Y'_{ij})$ über $\mathcal{O}_{Y'}(Y'_{ij})$ gegeben. Damit ist g endlich.
Damit bleibt zu zeigen, dass jeder endliche Morphismus abgeschlossen ist. Sei dazu $Z \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist die Abgeschlossenheit von $f(Z)$ in Y äquivalent dazu, dass $f(Z) \cap Y_i$ für alle $i \in I$ abgeschlossen in Y_i ist. Da $f(Z) \cap Y_i = f(Z \cap f^{-1}(Y_i))$ gilt,

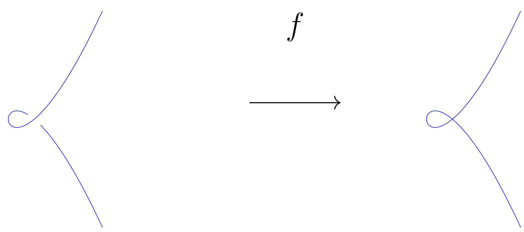
kann X durch $f^{-1}(Y_i)$ und Y durch Y_i ersetzt werden und wir können $f = \mathit{Spec}(\varphi) : \mathit{Spec}(S) = f^{-1}(Y_i) = X \to Y = Y_i = \mathit{Spec}(R)$ als endlichen Morphismus von affinen Schemata annehmen. Schreibe nun die beliebige abgeschlossene Teilmenge Z als $Z = V(I)$ für ein Ideal $I \subseteq S$ und betrachte das Ideal $J = \varphi^{-1}(I) \subseteq R$. Dann erhalten wir $f(Z) \subseteq V(J)$. Um die Gleichheit zu zeigen, betrachten wir das von φ induzierte, kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ R/J \arrow[r, hook, "\overline{\varphi}"] & S/I. \end{tikzcd} \tag{2}$$

Dabei ist die untere Abbildung gegeben durch $R/J \to S/I, r + J \mapsto \varphi(r) + I$ und $\overline{\varphi}$ ist genau wie φ endlich. Das „lying over‘-Theorem besagt dann, dass zu jedem Primideal $\mathfrak{q} \in \mathit{Spec}(R/J)$ ein Primideal $\mathfrak{p} \in \mathit{Spec}(S/I) = V(I)$ existiert, sodass $\overline{\varphi}^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ gilt (vgl. [Bos13, 3.3.2]). Das bedeutet, es gibt zu jedem $y \in V(J)$ eine Element $z \in Z$ mit $f(z) = y$. Damit folgt die Gleichheit $f(Z) = V(J)$ und f ist abgeschlossen.
(ii) Ist $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus von Schemata, so folgt die Surjektivität von f aus dem „lying over“-Theorem. □

Definition 2.18
Sind K ein Körper und Y ein integres K-Schema von endlichem Typ, so ist eine Auflösung von Singularitäten von Y ein reguläres, integres K-Schema X von endlichem Typ zusammen mit einem birationalen, eigentlichen Morphismus $f : X \to Y$.

Beispiel 2.19
Ein Beispiel für die Auflösung von Singularitäten sind sogenannte *Aufblasungen*. Dabei werden abgeschlossene Unterschemata mit singulären Punkten unter Zuhilfenahme weiterer Dimensionen „auseinandergezogen“, sodass die Singularitäten verschwinden.
So kann beispielsweise die in Grafik (3) dargestellte Kurve, die einen singulären Punkt in der Ebene besitzt, über eine Aufblasung im Raum regulär aufgelöst werden:



(3)

Bemerkung 2.20. Der Mathematiker Heisuke Hironaka bewies, dass für reduzierte K-Schemata von endlichem Typ in $char(K) = 0$ stets eine Auflösung von Singularitäten existiert (vgl. [GW10, 13.106]). Ist $char(K) > 0$, so ist die Auflösung für K-Schemata Y mit $dim(Y) \geq 4$ im Allgemeinen unbekannt und ein offenes Problem der algebraischen Geometrie.

3 Normalisierungen

Wir wollen im Folgenden Auflösungen von Singularitäten für integre K-Schemata Y von endlichem Typ mit $dim(Y) = 1$, sogenannte Kurven, konstruieren. Dafür werden wir zunächst das Konzept der Normalisierung einführen und für jedes integre Schema eine solche konstruieren.

Definition 3.1

- Ein Ring R heißt normal, falls $R_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich ist.
- Ein Schema Y heißt normal, falls $\mathcal{O}_{Y,y}$ für alle $y \in Y$ ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich ist.

Definition 3.2

- Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt ganz, falls eine affine, offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} Spec(R_i)$ existiert, sodass $f^{-1}(Spec(R_i)) = Spec(S_i)$ für alle $i \in I$ affin ist, d.h. f ist affin, und sodass der Ringhomomorphismus $f_i^{\#} : R_i \to S_i$ ganz ist, d.h. die Ringerweiterung $S_i | im(f_i^{\#})$ ganz ist. Die entsprechende Aussage ist dann für jede affine, offene Überdeckung von Y richtig (vgl. [GW10, 12.9]).
- Ein Morphismus $f : X \to Y$ von integren Schemata heißt eine Normalisierung von Y, falls

  (i) X normal und f dominant ist

  (ii) für jedes integre, normale Schema Z und jeden dominanten Morphismus $g : Z \to Y$ genau ein Morphismus $\tilde{g} : Z \to X$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z \arrow[u, dashed, "\exists! \tilde{g}"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{4}$$

  kommutativ macht.

Satz 3.3. *Jedes integre Schema Y besitzt eine bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutige Normalisierung. Dabei sind äquivalent:*
(i) $f : X \to Y$ ist eine Normalisierung.
(ii) X ist normal und $f : X \to Y$ ist birational und ganz.
Insbesondere ist die Normalisierung $f : X \to Y$ von Y surjektiv auf dem Niveau topologischer Räume.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Normalisierung folgt wie stets aus ihrer universellen Eigenschaft. Es genügt daher, ihre Existenz zu beweisen.
Schritt 1: Sei zunächst $Y = Spec(R)$ affin und betrachte $S := A_{Quot(R)}(R)$ den ganzen Abschluss von R in $Quot(R)$, $X := Spec(S)$ und $f = Spec(\iota) : X = Spec(R) \to Spec(S) = Y$ den von der Inklusion $\iota : R \to A_{Quot(R)}(R)$ induzierten Morphismus. Hierbei verwenden wir, dass R nach Bem. 2.6 ein Integritätsbereich ist.
Wir zeigen, dass $f : X \to Y$ eine Normalisierung von Y ist:
Zunächst ist $S = A_{Quot(R)}(R)$ per Definition ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich. Damit ist $X = Spec(S)$ normal, denn zusammen mit S ist auch $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong S_{\mathfrak{p}}$ ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich für alle $\mathfrak{p} \in X = Spec(S)$.
Das „lying over"-Theorem in [Isa94, 28.12] zeigt, dass f surjektiv und damit insbesondere dominant ist. Wegen $Quot(R) = Quot(S)$ ist f sogar birational.
Sei nun Z ein weiteres integres, normales Schema und $g : Z \to Y = Spec(R)$ ein dominanter Morphismus. Dann kommutiert das folgende Diagramm, wobei η den generischen Punkt von Z bezeichnet,

$$\begin{tikzcd} Quot(R) \arrow[r, "g_\eta^\#"] & K(Z) \\ R \arrow[u, hook] \arrow[r, "g_Z^\#"] & \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{5}$$

und $g_\eta^\#$ ist als Homomorphismus von Körpern injektiv. Damit ist auch $g_Z^\# : R \to \mathcal{O}_Z(Z)$ injektiv. Mit der Injektivität folgt, dass die Ringhomomorphismen als Inklusionen aufgefasst werden können und wir erhalten $S = A_{Quot(R)}(R) \subseteq A_{K(Z)}(R) \subseteq A_{K(Z)}(\mathcal{O}_Z(Z)) = \mathcal{O}_Z(Z)$. Die letzte Gleichheit gilt dabei, da $\mathcal{O}_Z(Z)$ nach [Liu02, 4.1.5] ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich ist.
Es folgt, dass $g_Z^\#$ aufgrund seiner Injektivität über einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $S \to \mathcal{O}_Z(Z)$ faktorisiert. Da Morphismen in affine Schemata eindeutig durch globale Schnitte gegeben sind (vgl. [Liu02, 2.3.23]), gibt es genau einen Morphis-

mus $\tilde{g} : Z \to X = Spec(S)$, der die gewünschte Eigenschaft hat.

Schritt 2: Ist $f : X \to Y$ eine Normalisierung, so ist für alle $\emptyset \neq U \subseteq Y$ offen $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ eine Normalisierung von U.

Zunächst ist U ebenfalls integer (vgl. Bem. 2.5).

Da f dominant ist, ist per Definition $f(X) \subseteq Y$ dicht und damit $f(X) \cap U \neq \emptyset$. Daraus folgt $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ und $f^{-1}(U)$ ist integer und normal. Die generischen Punkte von U und Y (resp. $f^{-1}(U)$ und X) stimmen überein und nach der Äquivalenz in Bem. 2.10, ist $f|_{f^{-1}(U)}$ dominant.

Es bleibt die universelle Eigenschaft zu zeigen. Sei dazu Z ein weiteres integres, normales Schema und $g : Z \to U$ ein dominanter Morphismus. Betrachte folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
f^{-1}(U) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "f"] & U \arrow[u, hook, "\iota"'] \\
Z \arrow[ur, "g"] \arrow[uu, dashed, bend left=60, "\exists!\widetilde{\iota \circ g}"]
\end{tikzcd} \tag{6}$$

Da die Verkettung $\iota \circ g$ wieder dominant ist (der generische Punkt von Z wird auf den generischen Punkt von Y abgebildet), existiert genau ein Morphismus $\widetilde{\iota \circ g} : Z \to X$ mit $f \circ \widetilde{\iota \circ g} = \iota \circ g$. Dies folgt aus der universellen Eigenschaft von $f : X \to Y$.

Weiter gilt $f((\widetilde{\iota \circ g})(Z)) = (\iota \circ g)(Z) \subseteq U \Rightarrow (\widetilde{\iota \circ g})(Z) \subseteq f^{-1}(U)$, d. h. $\widetilde{\iota \circ g}$ faktorisiert eindeutig als $Z \to f^{-1}(U) \hookrightarrow X$. Damit existiert ein eindeutiger Morphismus $\tilde{g} : Z \to f^{-1}(U)$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
f^{-1}(U) \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, "f"] & U \arrow[u, hook, "\iota"'] \\
Z \arrow[ur, "g"] \arrow[u, dashed, "\exists!\tilde{g}"]
\end{tikzcd} \tag{7}$$

kommutativ macht. Dies zeigt, dass $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ eine Normalisierung von U ist.

Schritt 3: Sei nun $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i = \bigcup_{i \in I} Spec(R_i)$ affine, offene Überdeckung mit $Spec(R_i) \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Außerdem seien wie oben $S_i = A_{Quot(R_i)}(R_i)$, $X_i = Spec(S_i)$ und $f_i : X_i \to Y_i$ für alle $i \in I$. Dann ist nach Schritt 1 $f_i : X_i \to Y_i$ für alle $i \in I$ eine

Normalisierung von Y_i.
Beachte, dass $U \cap V \neq \emptyset$ für alle $U, V \subseteq Y$ nicht-leer, offen gilt, da Y irreduzibel ist.
Für die offenen Unterschemata $Y_i \cap Y_j$, $i, j \in I$, von Y gilt dann nach Schritt 2, dass $f_i : f_i^{-1}(Y_i \cap Y_j) \to Y_i \cap Y_j$ und $f_j : f_j^{-1}(Y_i \cap Y_j) \to Y_i \cap Y_j$ Normalisierungen von $Y_i \cap Y_j$ sind.
Aus der universellen Eigenschaft der Normalisierung folgt dann, dass genau ein Morphismus $\psi_{ij} : f_i^{-1}(Y_i \cap Y_j) \to f_j^{-1}(Y_i \cap Y_j)$ existiert mit $f_i \circ \psi_{ij} = f_j$. Wir definieren $X_{ij} := f_i^{-1}(Y_i \cap Y_j)$ und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_{ij} \arrow[dd, dashed, shift left, "\psi_{ij}"] \arrow[dr, "f_i"] & \\
& Y_i \cap Y_j \\
X_{ji} \arrow[uu, dashed, shift left, "\psi_{ji}"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Betrachte für $i, j, k \in I$ die nicht-leeren, offenen Unterschemata $X_{ijk} := f_i^{-1}(Y_i \cap Y_j \cap Y_k)$ mit $X_{ijk} = f_i^{-1}(Y_i \cap Y_j \cap Y_k) = X_{ikj}$. Sei $\psi_{ij}^{(k)} = \psi_{ij}|_{X_{ijk}}$. Da Y nach Voraussetzung irreduzibel ist, gilt $Y_i \cap Y_j \cap Y_k \neq \emptyset$. Dann ist $f_i : X_{ijk} \to Y_i \cap Y_j \cap Y_k$ nach Schritt 2 eine Normalisierung von $Y_i \cap Y_j \cap Y_k$. Analog sind auch $f_j : X_{jik} \to Y_i \cap Y_j \cap Y_k$ und $f_k : X_{kij} \to Y_i \cap Y_j \cap Y_k$ Normalisierungen von $Y_i \cap Y_j \cap Y_k$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_{kij} \arrow[r, phantom, "="] & X_{kji} \arrow[dr, "f_k"] & \\
& X_{jki} \arrow[u, "\psi_{jk}^{(i)}"] \arrow[r, "f_j"] & Y_i \cap Y_j \cap Y_k \\
X_{ikj} \arrow[uu, "\psi_{ik}^{(j)}"] \arrow[r, phantom, "="] & X_{ijk} \arrow[u, "\psi_{ij}^{(k)}"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

kommutiert aufgrund von (8). Es gilt $\psi_{ik}^{(j)} = \psi_{jk}^{(i)} \circ \psi_{ij}^{(k)}$, d.h. die $\psi_{ij}^{(k)}$ erfüllen die Kozyklenrelation und wir können $(X_i, \psi_{ij} : X_{ij} \to X_{ji})$ zu einem Schema X mit offenen Immersionen $\varphi_i : X_i \to X$ verkleben, wobei die folgenden Eigenschaften für alle $i, j, k \in I$ gelten:

1. $X = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(X_i)$

2. $\varphi_i(X_{ij}) = \varphi_i(X_i) \cap \varphi_j(X_j)$

3. $\varphi_i|_{X_{ij}} \circ \psi_{ji} = \varphi_j|_{X_{ji}}$

Die Morphismen $\varphi_i(X_i) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{\iota} Y$ verkleben zu einem Morphismus von Schemata $f : X \to Y$, da sie auf $\varphi_i(X_i) \cap \varphi_j(X_j) = \varphi_i(X_{ij}) = \varphi_j(X_{ji})$ übereinstimmen. Dies folgt aus der Eigenschaft $\varphi_i|_{X_{ij}} \circ \psi_{ji} = \varphi_j|_{X_{ji}}$. Damit gilt nämlich $f_i \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(X_{ij})} = f_i \circ \psi_{ji} \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(X_{ji})} = f_j \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(X_{ji})}$ und die Morphismen stimmen überein. In Schritt 1 haben wir gesehen, dass alle f_i surjektiv sind, womit f ebenfalls surjektiv und damit insbesondere dominant ist.

Das Schema X besitzt eine offene, normale Überdeckung, nämlich die der $\varphi_i(X_i) \cong X_i$ und ist folglich normal. Wenn $U, V \subseteq X$ offen und nichtleer sind, können wir $i, j \in I$ wählen mit $U \cap \varphi_i(X_i) \neq \emptyset \neq V \cap \varphi_j(X_j)$. Zudem gilt $\varphi_i(X_i) \cap \varphi_j(X_j) = \varphi_i(X_{ij}) = \varphi_i(f_i^{-1}(Y_i \cap Y_j)) \neq \emptyset$, da $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ aufgrund der Irreduzibilität von Y gilt. Dann ist $U \cap V \cap \varphi_i(X_i) \cap \varphi_j(X_j) \neq \emptyset$, da $\varphi_i(X_i), \varphi_j(X_j)$ irreduzibel sind. Dann muss aber gelten, dass $U \cap V \neq \emptyset$. Damit ist X irreduzibel, also insgesamt integer und normal.

Es bleibt die universelle Eigenschaft zu zeigen. Sei dazu Z ein weiteres integres, normales Schema und $g : Z \to Y$ dominant. Da g dominant ist, liegt $g(Z)$ dicht in Y und $g(Z) \cap Y_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ impliziert, dass $\emptyset \neq g^{-1}(Y_i) \subseteq Z$ offen und folglich irreduzibel und normal ist. Wie in Schritt 2 ist auch $g : g^{-1}(Y_i) \to Y_i$ dominant. Aufgrund der universellen Eigenschaft der Normalisierung $f_i : X_i \to Y_i$ existiert genau ein Morphismus $g_i : g^{-1}(Y_i) \to X_i$ mit $f_i \circ g_i = g$ als Morphismen $g^{-1}(Y_i) \to Y_i$. Wir setzen $\tilde{g}_i := \varphi_i \circ g_i : g^{-1}(Y_i) \to X$.

Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
g^{-1}(Y_i) \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "g_i"] & Y_i \\
X_i \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

folgt dann, dass $g_i|_{g^{-1}(Y_i \cap Y_j)}$ über die offene Immersion $X_{ij} \hookrightarrow X_i$ faktorisiert. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
g^{-1}(Y_i \cap Y_j) \arrow[d, "g_i"] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, bend right=60, "g_j"'] & \\
X_{ij} \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & Y_i \cap Y_j \\
X_{ji} \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Die zwei vertikalen Pfeile des Diagramms (11) lassen das äußere Dreieck kommutieren und stimmen aufgrund der universellen Eigenschaft der Normalisierung $f_j : X_{ji} \to Y_i \cap Y_j$ überein. Nach der Eigenschaft 3 des Verklebungssatzes stimmen $\tilde{g}_i$ und $\tilde{g}_j$ auf $g^{-1}(Y_i \cap Y_j) = g^{-1}(Y_i) \cap g^{-1}(Y_j)$ überein. Daher verkleben die $\tilde{g}_i$ zu einem Morphismus $\tilde{g} : Z \to X$ mit $\tilde{g}|_{g^{-1}(Y_i)} = \tilde{g}_i = \varphi_i \circ g_i$ für alle $i \in I$.
Da $Z = \bigcup_{i \in I} g^{-1}(Y_i)$ kommutiert insbesondere das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tilde{g}"] & Y \\
X \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd} \tag{12}$$

Für die Eindeutigkeit von g betrachte einen dominanten Morphismus $h : Z \to Y$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Y \\
X \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd} \tag{13}$$

ebenfalls kommutiert. Für alle $i \in I$ bildet der dominante Morphismus $h|_{g^{-1}(Y_i)}$ nach $f^{-1}(Y_i) = \varphi_i(X_i)$ ab und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
g^{-1}(Y_i) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Y_i \\
\varphi_i(X_i) \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd} \tag{14}$$

kommutiert ebenfalls. Folglich gilt $f_i \circ \varphi_i^{-1} \circ h = f \circ h = g = f_i \circ \varphi_i^{-1} \circ \tilde{g}_i$ auf $g^{-1}(Y_i)$ und aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von $f_i : X_i \to Y_i$ folgt dann, dass $h|_{g^{-1}(Y_i)} = \tilde{g}_i$ für alle $i \in I$ und damit $h = \tilde{g}$ gilt.

Um die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen, nehmen wir zunächst an, dass $f : X \to Y$ eine Normalisierung von Y ist. Dann ist f bis auf Isomorphie die in diesem Beweis konstruierte Normalisierung und wir können aufgrund der Konstruktion X schreiben als $X = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(X_i)$. Da die Normalisierung f per Definition dominant und der Ringhomomorphismus $f_\eta^\# : \mathcal{O}_{Y_i, f_i(\varphi_i^{-1}(\eta))} \cong \mathcal{O}_{Y, f(\eta)} \to \mathcal{O}_{X,\eta} \cong \mathcal{O}_{X_i, \varphi_i^{-1}(\eta)}$, wobei η den generischen Punkt von X bezeichnet, nach Schritt 1 bijektiv ist, ist f birational.
Umgekehrt sei $g : \tilde{X} \to Y$ birational und ganz mit $\tilde{X}$ normal und integer. Betrachten wir die oben konstruierte Normalisierung $f : X \to Y$, so folgt aus deren universeller Eigenschaft, dass genau ein Morphismus $\tilde{f} : \tilde{X} \to X$ existiert mit $g = f \circ \tilde{f}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \tilde{X} \arrow[u, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{15}$$

Wir betrachten eine affine, offene Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ und die davon induzierte, oben konstruierte Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, wobei wir X_i über φ_i mit $\varphi_i(X_i)$ identifizieren. Dann folgt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(Y_i) \arrow[r, "g_{Y_i}^\#"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\tilde{X}}(g^{-1}(Y_i)) \arrow[d] \\ K(Y) \arrow[r, "g_\zeta^\#"] & K(\tilde{X}) \end{tikzcd} \tag{16}$$

für ζ, den generischen Punkt von $\tilde{X}$, kommutiert. Dabei sind die vertikalen Abbildungen injektiv (vgl. [GW10, 3.29 (2)]) und nach Voraussetzung ist $g_\zeta^\#$ bijektiv. $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(g^{-1}(Y_i))$ ist ganzabgeschlossen nach [Liu02, 4.1.5]. Da $g_{Y_i}^\#$ ganz ist, schränkt sich $g_\zeta^\#$ zu einem Isomorphismus zwischen dem ganzen Abschluss von $\mathcal{O}_Y(Y_i)$ in $K(Y)$ auf $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(g^{-1}(Y_i))$ ein. Nach Konstruktion von X schränkt sich daher $\tilde{f}$ zu einem Isomorphismus $g^{-1}(Y_i) = Spec(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(g^{-1}(Y_i)) \to Spec(\mathcal{O}_X(X_i)) = X_i \subseteq X$ ein, da g ganz und damit affin ist. Daraus ergibt sich, dass $\tilde{f}$ offen und surjektiv ist. Für zwei Elemente $\tilde{x_i} \in g^{-1}(Y_i)$ und $\tilde{x_j} \in g^{-1}(Y_j)$ mit $\tilde{f}(\tilde{x_i}) = \tilde{f}(\tilde{x_j})$ folgt $g(\tilde{x_i}) = g(\tilde{x_j}) \in Y_i \cap Y_j$ aufgrund der Kommutativität des Diagramms (15). Somit liegen $\tilde{x_i}$ und $\tilde{x_j}$ in $g^{-1}(Y_i \cap Y_j) \subseteq g^{-1}(Y_i)$, worauf $\tilde{f}$ injektiv ist. Daraus folgt, dass $\tilde{x_i} = \tilde{x_j}$ und somit ist f insgesamt ein Homöomorphismus und ein Isomorphismus von Schemata. $\square$

Korollar 3.4. *Ist $f : X \to Y$ eine Normalisierung eines integren Schemas Y, so gilt $dim(X) = dim(Y)$.*

Beweis. Sei $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ mit $\emptyset \neq Y_i = Spec(R_i)$ für alle $i \in I$ eine affine, offene Überdeckung von Y. Dann ist $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$ eine affine, offene Überdeckung von X, wobei nach Konstruktion $f^{-1}(Y_i) = Spec(A_{Quot(R_i)}(R_i))$ gilt.
Da $A_{Quot(R_i)}(R_i)|R_i$ eine ganze Ringerweiterung ist, gilt

$$dim(f^{-1}(Y_i)) = dim(A_{Quot(R_i)}(R_i)) = dim(R_i) = dim(Y_i)$$

für alle $i \in I$. Durch Übergang zum Supremum erhalten wir damit

$$dim(Y) = sup\{dim(Y_i)|i \in I\} = sup\{dim(f^{-1}(X_i))|i \in I\} = dim(X).$$

□

4 Auflösung von Singularitäten

Wir wollen nun zeigen, dass die Normalisierung $f : X \to Y$ eines integren, eindimensionalen K-Schemas von endlichem Typ eine Auflösung von Singularitäten ist. Dazu zeigen wir, dass der Morphismus f endlich ist und dass X von endlichem Typ sowie regulär ist. Für diese Beweise benötigen wir die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 4.1. *Sei $E|F$ eine vollständig inseparable Körpererweiterung mit $char(F) = p \neq 0$. Dann existiert für jedes $\alpha \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^{p^n} \in F$.*

Beweis. Bezeichne mit f_α das Minimalpolynom von $\alpha \in E$. Da das Minimalpolynom per Definition irreduzibel, gilt nach [Isa94, 19.5] $f'_\alpha = 0$. Schreiben wir f_α als $f_\alpha(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, so erhalten wir $0 = f'_\alpha(x) = \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1}$ und damit $ia_i = 0$ für $0 \leq i \leq n$. Es folgt, dass $a_i = 0$ immer dann, wenn $p \nmid i$. Damit können wir f_α schreiben als $f_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{[n/p]} a_{pj} x^{pj} = g(x^p)$, wobei $g(x) = \sum_{j=0}^{[n/p]} a_{pj} x^j$. Da f nach Voraussetzung irreduzibel ist, muss auch g irreduzibel sein. Somit können wir $f_\alpha(x) = g(x^{p^n})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schreiben, wobei $g \in F[x]$ irreduzibel und separabel ist: Ist f bereits separabel, so wähle $g = f$ und $n = 0$. Ist f noch nicht separabel, schreibe $f = h(x^p)$ für ein irreduzibles Polynom $h \in F[x]$ wie oben. Da nun $deg(h) < deg(f)$ können wir induktiv $h(x) = g(x^{p^n})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein irreduzibles, separables Polynom g schreiben. Dann gilt $f(x) = g(x^{p^{n+1}})$.
Also sei $f_\alpha(x) = g(x^{p^n})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein irreduzibles, separables $g \in F[x]$. Aus $g(\alpha^{p^n}) = f(\alpha) = 0$ folgt, dass g das Minimalpolynom von α^{p^n} über F ist. Da g separabel ist, ist auch α^{p^n} separabel über F und wegen der vollständigen Inseparabilität von $E|F$ muss α^{p^n} schon in F liegen. □

Lemma 4.2. *Sind R ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich, $K := Quot(R)$ sein Quotientenkörper, $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung, so ist der ganze Abschluss von R in L $A_L(R)$ ganzabgeschlossen mit Quotientenkörper L.*

Beweis. Sei $\alpha \in L$ ein beliebiges Element und schreibe $\mu_\alpha(t) = t^n + \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} t^{n-1} + ... + \frac{r_0}{s_0} \in K[t]$ mit $r_i, s_i \in R, s_i \neq 0$, für das Minimalpolynom von α über K. Setze $s := s_0 \cdot ... \cdot s_{n-1} \in R \backslash \{0\}$. Dann gilt $0 = s^n \cdot 0 = s^n \cdot \mu_\alpha(\alpha) = (s \cdot \alpha)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{r_i}{s_i} s^{n-i} (s \cdot \alpha)^i$ mit $\frac{r_i}{s_i} s^{n-i} \in R$ für alle $1 \leq i \leq n-1$, da s_i nach Definition von s ein Teiler von s in R ist. Es folgt, dass $s\alpha \in A_L(R)$ und $\alpha = \frac{s\alpha}{s} \in Quot(A_L(R))$, weil $R \subseteq A_L(R)$. Da $\alpha \in L$ beliebig gewählt war, folgt $L \subseteq Quot(A_L(R)) \subseteq L$ und damit $L = Quot(A_L(R))$.

Setzen wir $S := A_L(R)$, so sind $A_L(S)|S$ und $S|R$ ganz und damit ist wegen der Transitivität von ganzen Erweiterungen auch $A_L(S)|R$ ganz. Folglich ergibt sich $S \subseteq A_L(S) \subseteq A_L(R) = S$. Da $Quot(S) = L$ ist, ist S ganzabgeschlossen. $\square$

Proposition 4.3. *Sei K ein Körper, Y ein integres K-Schema (lokal) von endlichem Typ. Dann ist die Normalisierung $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus und X ist ebenfalls ein K-Schema (lokal) von endlichem Typ.*

Beweis. (vgl. [Liu02, § 4.1.2])
Schritt 1: Wir zeigen zunächst, dass für einen noetherschen, ganzabgeschlossenen Integritätsbereich R und eine endliche, separable Körpererweiterung L von $K := Quot(R)$ der ganze Abschluss $B := A_L(R)$ von R in L ein endlich erzeugter R-Modul ist.
Betrachte dazu die Spur $\rho : L \times L \to K, (x, y) \mapsto Tr_{L|K(}(xy)$. Da $L|K$ separabel ist, gilt nach [Lan84, 6.5.2], dass die Spur eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist, d.h. dass für alle $x \in L \backslash \{0\}$ ein $y \in L$ mit $Tr_{L|K}(xy) \neq 0$ existiert. Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis von L über K. Wie im Beweis von 4.2 gesehen, können wir sogar $e_1, ...e_n \in B$ wählen. Weiter gilt, dass die Abbildung $L \to L^* := Hom_K(L, K), x \mapsto Tr_{L|K}(x\cdot)$ ein K-linearer Isomorphismus ist. Da $dim(L) = dim(L^*)$, genügt es, dafür die Injektivität zu zeigen. Diese folgt aber unmittelbar daraus, dass die Spur nicht ausgeartet ist. Betrachte die K-lineare Abbildung $\varphi_j : L \to K$ definiert durch $\varphi_j(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k) = \alpha_j$. Es existiert dann genau ein $e_j^* \in L$ mit $\varphi_j = Tr_{L|K}(e_j^* \cdot)$ und damit $Tr_{L|K}(e_j^* e_i) = \varphi_j(e_i) = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die Elemente $e_1^*, ..., e_n^*$ formen dann eine K-Basis von L: Wegen $n = dim_K(L)$ genügt es, die lineare Unabhängigkeit von $e_1^*, ..., e_n^*$ zu zeigen. Betrachte dazu $0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^* \in L$, wobei $\lambda_j \in K$. Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt $0 = Tr_{L|K}(e_i 0) = Tr_{L|K}(e_i \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k^*) = Tr_{L|K}(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_i e_k^*) = \sum_{k=1}^n \lambda_k Tr_{L|K}(e_i e_k^*) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta_{ik} = \lambda_i$.
Für ein Element $b \in B$ ist $Tr_{L|K}(b)$ (bis auf das Vorzeichen) ein Koeffizient des charakteristischen Polynoms χ_b von b, d.h. des charakteristischen Polynoms der linearen Abbildung $L \to L, x \mapsto bx$ (vgl. [Isa94, 23.2]). Nach [Isa94, 17.9] ist das charakteristische Polynom $\chi_b = \mu_b^k$, $k \in \mathbb{N}$, eine Potenz des Minimalpolynoms μ_b. Für das Minimalpoylnom gilt aber $\mu_b \in R[t]$ nach Lemma 4.2 und entsprechend $\chi_b \in R[t]$. Folglich gilt $Tr_{L|K}(b) \in R$ für alle $b \in B$. Schreiben wir nun $b \in B$ wie oben als $b = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_i^*$ mit $\lambda_k \in K$, so folgt mit derselben Rechnung $\lambda_i = Tr_{L|K}(be_i) \in R$, da $be_i \in B$ gilt.
Insgesamt ist damit B ein R-Untermodul von $\sum_{k=1}^n Re_k^*$ und damit endlich über R, da R noethersch ist.

Schritt 2: Wir zeigen, dass für einen Körper K und eine endliche Erweiterung L von $K(t_1, ..., t_n)$ der ganze Abschluss B von $K[t_1, ..., t_n]$ in L endlich über $K[t_1, ..., t_n]$ ist. Dabei bezeichne $R := K[t_1, ..., t_n]$ und $F := Quot(K[t_1, ...t_n]) = K(t_1, ..., t_n)$.
Bemerke zunächst, dass eine endliche Erweiterung von L existiert (wähle beispielsweise den normalen Abschluss von $L|F$), die separabel über einer vollständig inseparablen Erweiterung von F ist (vgl. [Lan84, 6.6.11]). Benenne diese vollständig inseparable Erweiterung von F mit F'. Dann genügt es nach Schritt 1 zu zeigen, dass der ganze Abschluss $A_{F'}(R)$ von $R = K[t_1, ...t_n]$ in F' endlich über R ist. Beachte hierzu, dass dann $A_{F'}(R)$ noethersch ist und außerdem ganzabgeschlossen nach Lemma 4.2, denn R ist als faktorieller Ring ganzabgeschlossen (vgl. Lemma 5.1). Mit anderen Worten können wir ohne Einschränkung $L|F$ als vollkommen inseparabel annehmen.
1. Fall: $char(K) = 0$: In diesem Fall ist F perfekt, d.h. jede endliche Erweiterung ist separabel. Somit folgt $L = F$ und $B = R$, da R ganzabgeschlossen ist.
2. Fall: $char(K) = p > 0$: Da $L|F$ eine endliche Erweiterung ist, können wir ein endliches Erzeugendensystem $(e_j)_{j\in J}$ von L als F-Vektorraum wählen mit $e_j \in B$ für alle $j \in J$ (vgl. den Beweis von Lemma 4.2). Aus Lemma 4.1 folgt, dass $q = p^r, r \in \mathbb{N}$, existiert mit $e_j^q \in F$ für alle $j \in J$. Dann gilt sogar $e_j^q \in B \cap F = R = K[t_1, ..., t_n]$, da R ganzabgeschlossen ist.
Fixiere nun einen algebraischen Abschluss $\bar{F}$ von F mit $L \subseteq \bar{F}$. Schreibe $e_j^q \in R = K[t_1, ..., t_n]$ als $e_j^q = \frac{f_j(t_1,...,t_n)}{g_j(t_1,...,t_n)}$, wobei $f_j, g_j \in K[t_1, ..., t_n] \subseteq K(t_1, ..., t_n) = F \subseteq L$ mit $f_j = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_{j,\alpha} \cdot t_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot t_n^{\alpha_n}$ und $g_j = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_{j,\alpha} \cdot t_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot t_n^{\alpha_n} \neq 0$.
Definiere $\tilde{F} := K[\{c^{\frac{1}{q}} | c \in K \text{ ist Koeffizient von } f_j \text{ oder } g_j\}]$, wobei $\tilde{F}|K$ per Konstruktion endlich ist.
Zeige nun: $L \subseteq \tilde{F}(s_1, ..., s_n)$, wobei $s_i = t_i^{\frac{1}{q}}$:
Da aus der Konstruktion $F = K(t_1, ..., t_n) = K(s_1^q, ..., s_n^q) \subseteq \tilde{F}(s_1, ..., s_n)$ folgt, genügt es zu zeigen, dass $e_j \in \tilde{F}(s_1, ..., s_n)$ für alle $j \in J$ gilt. Betrachte dazu $h_j = \frac{\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_{j,\alpha}^{\frac{1}{q}} s_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot s_n^{\alpha_n}}{\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_{j,\alpha}^{\frac{1}{q}} s_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot s_n^{\alpha_n}}$, welches ein Element in $\tilde{F}(s_1, ..., s_n)$ ist und für das $h_j^q = e_j$ (in $\bar{F}$) gilt. Da $\tilde{F}(s_1, ..., s_n)$ als Körper abgeschlossen unter Multiplikation ist, gilt schon $e_j \in \tilde{F}(s_1, ..., s_n)$. Beachte hierbei, dass aufgrund der Injektivität der q-Potenzierung der Nenner von h_j immer ungleich 0 ist, da $g_j \neq 0$, und damit h_j wohldefiniert ist. Somit ergibt sich $L \subseteq \tilde{F}(s_1, ..., s_n)$. Nun ist $\tilde{F}[s_1, ..., s_n]$ ganzabgeschlossen und endlich über R. Damit ergibt sich, dass auch $B \subseteq \tilde{F}[s_1, ..., s_n]$ endlich über R ist.

Schritt 3: Betrachte nun $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ eine affine, offene Überdeckung von Y, sodass $R_i := \mathcal{O}_Y(Y_i)$ eine endlich erzeugte K-Algebra ist. Nach Konstruktion der Normalisierung im Beweis von Satz 3.3 ist dann $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i) = \bigcup_{i \in I} Spec(S_i)$, mit S_i für alle $i \in I$ der ganze Abschluss von R_i in $K(Y)$, eine affine, offene Überdeckung von X. Nach der Noether-Normalisierung existieren für festes $i \in I$ Elemente $t_1, ..., t_n$ algebraisch unabhängig über K, sodass $R_i | K[t_1, ..., t_n]$ endlich ist. Dann ist auch $K(Y) = Quot(R_i) | K(t_1, ..., t_n)$ endlich und wegen der Transititivät von *ganz* in Ringerweiterungen besitzen R_i und $K[t_1, ..., t_n]$ denselben ganzen Abschluss $S_i = A_{K(Y)}(R_i) = A_{K(Y)}(K[t_1, ..., t_n])$. Nach Schritt 2 ist $S_i | K[t_1, ..., t_n]$ endlich, weswegen auch $S_i | R_i$ endlich ist. Insbesondere ist auch S_i eine K-Algebra von endlichem Typ. Damit ist X lokal von endlichem Typ über K und f ist ein endlicher Morphismus.
Ist zudem Y quasi-kompakt, so kann die Indexmenge I endlich gewählte werden. Dann besitzt X eine endliche, offene Überdeckung durch affine und damit quasi-kompakte Schemata, ist also selbst quasi-kompakt. □

Bemerkung 4.4. Ist Y ein integres K-Schema von endlichem Typ, so ist die Normalisierung $f : X \to Y$ nach Bem. 2.17 insbesondere eigentlich.

Bemerkung 4.5. Im Allgemeinen ist die Normalisierung $f : X \to Y$ nicht endlich, selbst wenn Y noethersch und eindimensional ist. Allgemeine Endlichkeitsresultate gibt es aber dennoch. Der Satz von Krull-Azuki besagt beispielsweise, dass für ein integres, noethersches Schema Y mit Dimension 1, $L|K(Y)$ eine endliche Erweiterung und $f : X \to Y$ die Normalisierung von Y in L, X stets ein Dedekind-Schema ist und für alle echten abgeschlossenen Unterschemata $U \subseteq Y$ die Einschränkung $f_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to Y$ endlich ist (vgl. [GW10, 12.54]).

Proposition 4.6. *Ist Y integer, sodass die Normalisierung $f : X \to Y$ endlich ist, so ist $U := \{y \in Y | \mathcal{O}_{Y,y}$ ist normal $\}$ offen in Y.*

Beweis. Sei o.B.d.A. $Y = Spec(R)$ affin und sei S der ganze Abschluss von R (in $K(Y)$). Ist $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ ein Primideal, so ist $S_\mathfrak{p}$ der ganze Abschluss von $R_\mathfrak{p}$ in $K(Y)$. Daher ist $\mathfrak{p} \in U$ äquivalent zu $S_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}$, d.h. zu $(S/R) \bigotimes_R R_\mathfrak{p} = 0$.
Wir zeigen nun $U = Spec(R) \backslash V(I)$, wobei $I = Ann(S/R) = \{r \in R | r(S/R) = 0\}$ der Annulator des R-Moduls S/R ist.
Für die eine Inklusion sei $\mathfrak{p} \in Spec(R) \backslash V(I)$. Dann gilt $I \nsubseteq \mathfrak{p}$ und damit existiert $a \in I \backslash \mathfrak{p}$. Dieses a erfüllt $x \otimes 1 = ax \otimes \frac{1}{a} = 0$ für alle $x \in S/R$. Daraus folgt $(S/R) \otimes_R R_\mathfrak{p} = 0$ und

nach obiger Äquivalenz gilt $\mathfrak{p} \in U$.
Für die andere Inklusion sei $\mathfrak{p} \in U$. Nach obiger Äquivalenz gilt $(S/R) \otimes_R R_\mathfrak{p} = 0$. Seien $r_1, ..., r_n$ für $n \in \mathbb{N}$ die Erzeuger des nach Voraussetzung endlich erzeugten R-Moduls S. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$, dass ein $a_i \in R \backslash \mathfrak{p}$ existiert mit $a_i r_i \in R$. Definiere $a := a_1 \cdot ... \cdot a_n \in R \backslash \mathfrak{p}$ mit $aS = a \sum_{i=1}^n Rr_i \subseteq R \Rightarrow a(S/R) = 0$. Damit liegt a in I. Da $a \notin \mathfrak{p}$ folgt, dass $I \nsubseteq \mathfrak{p}$ und damit $\mathfrak{p} \notin V(I)$.
Also gilt $U = Spec(R) \backslash V(I)$ und per Definition der Zariski-Topologie ist U offen. □

Satz 4.7. *Sei X lokal noethersch*
(i) X regulär $\Rightarrow X$ normal
(ii) X normal und $dim(X) \leq 1 \Rightarrow X$ regulär

Beweis. (i) vgl. [Mat06, 19.4]
(ii) Sei $x \in X$ und wähle $x \in U = Spec(R)$ affin zusammenhängend mit R noethersch. Dann folgt aus U zusammenhängend, dass U integer (vgl. [GW10, 6.37]). Nach [GW10, 6.38(i)] ist daher R ein ganzabeschlossener Integritätsbereich. Außerdem gilt $dim(U) = dim(Spec(R)) = dim(R) \leq dim(X) = 1$.
Schreiben wir $x = \mathfrak{p} \in Spec(R)$ als Primideal, so gilt $dim(R_\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p}) \leq dim(R) \leq 1$.
1. Fall: $dim(R_\mathfrak{p}) = 0$: Dann ist $R_\mathfrak{p}$ ein Körper und es gilt $dim(R_\mathfrak{p}) = 0 = dim_{\kappa(0)}(0/0^2)$.
2. Fall: $dim(R_\mathfrak{p}) = 1$: Wir zeigen, dass das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von $R_\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist. Nach dem Lemma von Nakayama gilt $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, da sonst $\mathfrak{m} = 0$ gelten würde und dann wäre $R_\mathfrak{p}$ ein Körper im Widerspruch zu $dim(R_\mathfrak{p}) = 1$. Also können wir $x \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$ wählen. Nach [Liu02, 2.5.15] gilt $dim(R_\mathfrak{p}/xR_\mathfrak{p}) = dim(R_\mathfrak{p}) - 1 = 1 - 1 = 0$. Da $R_\mathfrak{p}/xR_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring ist, ist seine Dimension genau dann Null, wenn sein maximales Ideal gleich dem Nilradikal ist (vgl. [Liu02, 2.5.11]). Damit ist $\mathfrak{m} = Rad(x)$. Da $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt ist, existiert $r > 1$ mit $\mathfrak{m}^r \subseteq xR_\mathfrak{p}$. Dann gilt für alle $y \in \mathfrak{m}^{r-1}$, dass $(x^{-1}y)\mathfrak{m} \subseteq x^{-1}\mathfrak{m}^r \subseteq R_\mathfrak{p}$. Folglich ist $(x^{-1}y)\mathfrak{m} \subseteq R_\mathfrak{p}$ ein Ideal mit $(x^{-1}y)\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, denn anderenfalls würde $x^{-1}y\mathfrak{m} = R_\mathfrak{p}$ gelten und damit $x \in y\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^r \subseteq \mathfrak{m}^2$ im Widerspruch zu Wahl von x. Nach [Liu02, 4.1.11] ist das Element $x^{-1}y$ ganz über $R_\mathfrak{p}$ und damit $x^{-1}y \in R_\mathfrak{p}$, da X normal und somit $R_\mathfrak{p}$ ganzabgeschlossen ist. Folglich ist $y \in xR_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}^{r-1} \subseteq xR_\mathfrak{p}$. Induktiv ergibt sich, dass $\mathfrak{m} \subseteq xR_\mathfrak{p}$ und, da $\mathfrak{m}$ maximal, $\mathfrak{m} = xR_\mathfrak{p}$.
Daraus folgt $dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1 = dim(R_\mathfrak{p})$, wie behauptet. □

Bemerkung 4.8. In der Notation des obigen Beweises ist tatsächlich $R_\mathfrak{p}$ sogar ein Hauptidealring, d.h. zusammen mit seinem maximalen Ideal ist sogar jedes Ideal ein Hauptideal (vgl. [Liu02, 6.1.12]).

Korollar 4.9. *Ist Y ein eindimensionales, integres K-Schema von endlichem Typ, so besitzt Y eine Auflösung $f : X \to Y$ von Singularitäten, nämlich die Normalisierung von Y. f ist endlich und X ist ein reguläres, integres eindimensionales K-Schema von endlichem Typ.*

Beweis. Zunächst ist die Normalisierung von Y per Definition normal. In Kor. 3.4 haben wir gesehen, dass für die Normalisierung die Dimensionen $dim(X) = dim(Y) = 1$ übereinstimmen. Nach Prop. 4.3 ist X ein K-Schema von endlichem Typ und daher normal und lokal noethersch. Aus diesem Grund folgt mit Satz 4.7, dass X regulär ist. f ist nach der Äquivalenz aus Satz 3.3 ein birationaler Morphismus von Schemata. Die Eigentlichkeit von f haben wir in Bem. 4.4 festgehalten. Sie folgt aus der Endlichkeit von f (vgl. Prop. 4.3). □

Bemerkung 4.10. Im ersten Kapitel von [Kol07] existieren diverse andere Beweise für diesen Satz.

5 Beispiele

Zum Schluss werden wir noch einige Beispiele für die Bestimmung einer Auflösung von Singularitäten für Kurven betrachten. Dafür werden wir die Normalisierung der Kurven berechnen, die dann nach Kor. 4.9 einer Auflösung von Singularitäten entspricht. Dafür zeigen wir zunächst, dass jeder faktorielle Ring ganzabgeschlossen ist, um später folgern zu können, dass das Schema eines faktoriellen Ringes normal ist. Tatsächlich haben wir dies an einigen Stellen bereits genutzt.

Lemma 5.1. *Jeder faktorielle Ring R ist ganzabgeschlossen.*

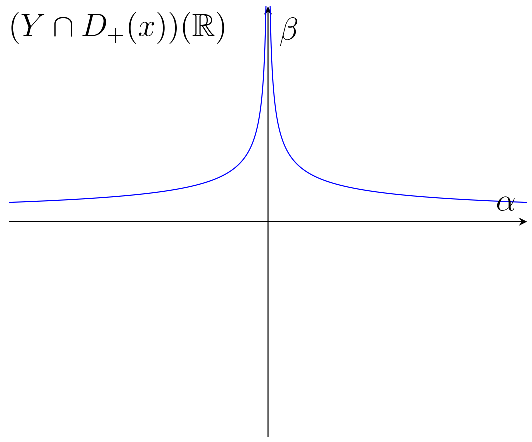
Beweis. Bezeichne mit $K := Quot(R)$ den Quotientenkörper von R. Angenommen, es existiert ein Element $x \in K \backslash R$, das ganz über R ist, so können wir x schreiben als $x = \frac{a}{b}$ mit $a \in R$ und $b \in R \backslash \{0\}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass a und b keine gemeinsamen Primteiler besitzen. Da x ganz über R ist existieren $n \in \mathbb{N}$ und $c_0, ..., c_{n-1} \in R$ mit $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_0 = 0$. Dann gilt aber wegen $a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + ... + c_0 b^n = 0 \Leftrightarrow a^n = b(-c_{n-1}a^{n-1} - ... - c_0 b^{n-1})$, dass b ein Teiler von a^n ist. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass a und b keine gemeinsamen Primteiler besitzen, und unsere Annahme, dass es ein ganzes Element in $K \backslash R$ existiert, muss falsch sein. Daher gilt, dass der ganze Abschluss von R in K schon R selbst ist. $\square$

Beispiel 5.2
K Körper, $Y = Proj(K[x, y, z]/(x^3 - y^2 z)) = V_+(x^3 - y^2 z) \subseteq \mathbb{P}^2_K$.
Über die Identifikation

$$\begin{aligned} K = D_+(t)(K) = \mathbb{A}^2_K(K) \to \mathbb{P}^2_K(K) &\cong (K^3 \backslash \{0\})/\sim \\ t = x : (a, b) &\mapsto [1 : a : b] \\ t = y : (a, b) &\mapsto [a : 1 : b] \\ t = z : (a, b) &\mapsto [a : b : 1] \end{aligned}$$

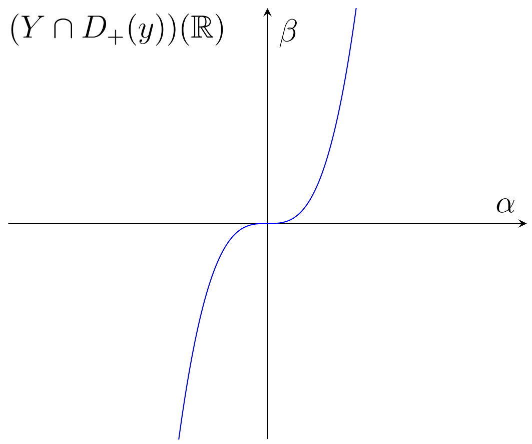
können die K-rationalen Punkte der Schnitte $Y \cap D_+(t)$ für $t \in \{x, y, z\}$ folgendermaßen veranschaulicht werden:
Der Schnitt $Y \cap D_+(x)$ entspricht den Paaren $(\alpha, \beta) \in K^2$ mit $[1 : \alpha : \beta] \in V_+(x^3 - y^2 z)$. Das sind genau die $(\alpha, \beta) \in K^2$ mit $1 - \alpha^2 \beta = 0$.

Im Fall $K = \mathbb{R}$ ergibt sich das folgende Bild.



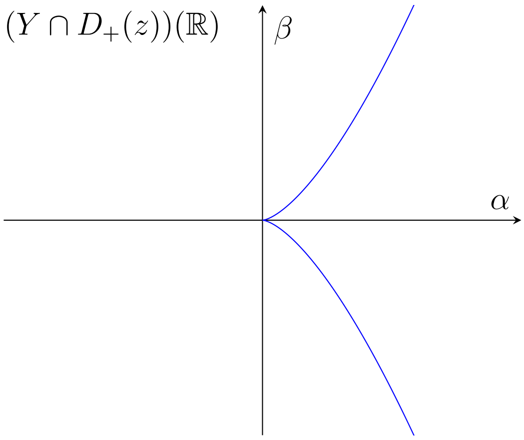
(17)

Der Schnitt $Y \cap D_+(y)$ entspricht analog den Paaren $(\alpha, \beta) \in K^2$ mit $[\alpha : 1 : \beta] \in V_+(x^3 - y^2 z)$. Das sind genau die $(\alpha, \beta) \in K^2$ mit $\alpha^3 - \beta = 0$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ergibt sich das folgende Bild.



(18)

Der Schnitt $Y \cap D_+(z)$ entspricht den Tupeln $(\alpha, \beta) \in K^2$ mit $[\alpha : \beta : 1] \in V_+(x^3 - y^2 z)$, d.h. den $(\alpha, \beta) \in K^2$ mit $\alpha^3 - \beta^2 = 0$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ergibt sich das folgende Bild.



(19)

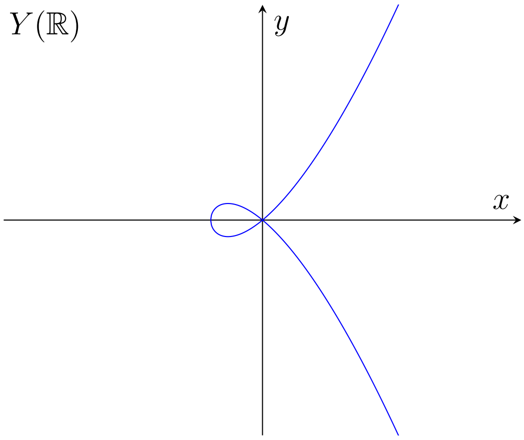
Gilt $char(K) \notin \{2, 3\}$, so ist der einzige singuläre K-rationale Punkt von Y durch $[0 : 0 : 1]$ gegeben: Da $g(x, y, z) = x^3 - y^2 z$ ein irreduzibles Polynom ist und $Y = V_+(g)$, entsprechen die regulären K-rationalen Punkte nach [LFZ, 2.6] den $a \in Y$ mit $J_g(a) \neq 0$. Hierbei bezeichnet $J_g(a) := (\frac{\partial f}{\partial t}(a))_{t \in \{x,y,z\}}$ die Jacobi-Matrix von g im Punkt a. Für $g(x, y, z) = x^3 - y^2 z$ ist J_g, gegeben durch $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -2yz \\ -y^2 \end{pmatrix}$, nur genau dann 0, wenn $x = y = 0$ (vorausgesetzt $char(K) \notin \{2, 3\}$).

Wir betrachten nun den Schnitt $Y \cap D_+(z)$ genauer. Für diesen gilt $Y \cap D_+(z) = V(t^3 - s^2) \subseteq D_+(z) = Spec(K[t, s]) = \mathbb{A}^2_K$, wobei $t := \frac{x}{z}, s := \frac{y}{z}$.
Für den Funktionenkörper von Y gilt $K(Y) \cong Quot(R)$ mit $R := K[t, s]/(t^3 - s^2)$. Seien τ, σ die Restklassen von t, s in R. Wegen der Gleichung $(\frac{\sigma}{\tau})^2 - \tau = \frac{\sigma^2 - \tau^3}{\tau^2} = 0$ in $K(Y)$ folgt $A_{K(Y)}(R) \supseteq R[\frac{\sigma}{\tau}] = K[\frac{\sigma}{\tau}]$. Man sieht aber leicht, dass $\frac{\sigma}{\tau}$ algebraisch unabhängig über K ist. Damit ist $K[\frac{\sigma}{\tau}]$ ein Polynomring in einer Variablen über K, also ein Hauptidealring und damit insbesondere ganzabgeschlossen. Insgesamt ist $A_{K(Y)}(R) = R[\frac{\sigma}{\tau}]$ und $K(Y) = K(\frac{\sigma}{\tau}) = K(\mathbb{P}^1_K)$. $\mathbb{P}^1_K$ ist ein irreduzibles und normales Schema, da es eine offene Überdeckung $\mathbb{P}^1_K = \mathbb{A}^1_K \cup \mathbb{A}^1_K$ durch die normalen und irreduziblen Schemata $\mathbb{A}^1_K = Spec(K[\frac{\sigma}{\tau}])$ und $\mathbb{A}^1_K = Spec(K[\frac{\tau}{\sigma}])$ mit nicht-leerem Schnitt besitzt. Für den zur Normalisierung gehörigen Morphismus betrachte $f : \mathbb{P}^1_K = Proj(K[S, T]) \to Y$ gegeben durch den graduierten Ringhomomorphismus $K[x, y, z]/(x^3 - y^2 z) \to K[S, T], x \mapsto$

$S^2T, y \mapsto S^3, z \mapsto T^3$. Mit der Gleichheit von $K(Y) = K(\mathbb{P}^1_K)$ folgt unmittelbar, dass $f^\#_\eta : K(Y) \to K(\mathbb{P}^1_K)$ bijektiv ist und gemeinsam mit der Irreduzibilität von Y ist f birational. Außerdem rechnet man direkt nach, dass f ganz ist: Für seine Enschränkung $f^{-1}(Y \cap D_+(z)) \to Y \cap D_+(z)$ haben wir dies oben gesehen. Unter der Verwendung der Äquivalenz in 3.3, haben wir insgesamt eine Normalisierung von Y und damit eine Auflösung von Singularitäten bestimmt.

Beispiel 5.3

K Körper, $Y = \mathit{Spec}(K[x,y]/(y^2 - x^2 - x^3)) = V(y^2 - x^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_K$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ erhält man das folgende Bild.



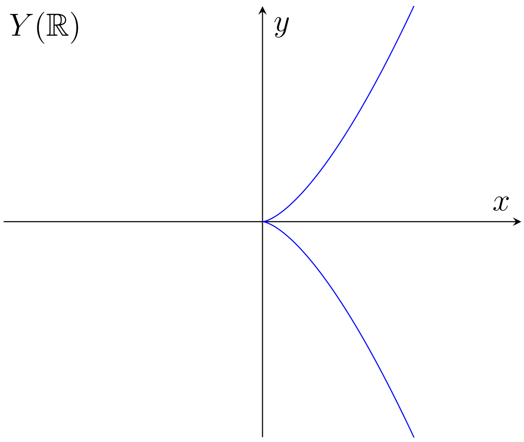
(20)

Man sieht leicht, dass das Polynom $y^2 - x^2 - x^3$ irreduzibel und damit Y integer ist.
Die zu $g(x,y) = y^2 - x^2 - x^3$ gehörige Jacobi-Matrix J_g, gegeben durch $J_g(x,y) = \begin{pmatrix} -2x - 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$, ist genau dann Null, wenn $x = y = 0$ oder $x = -\frac{2}{3}, y = 0$ (vorausgesetzt $\mathit{char}(K) \notin \{2,3\}$). Allerdings liegt der Punkt $(-\frac{2}{3}, 0)$ nicht in Y. Der einzige singuläre K-rationale Punkt von Y ist damit nach [Liu02, 4.2.19] der Punkt $(0,0)$.
Wir behaupten, dass die Normalisierung von Y gegeben ist durch den Morphismus
$f : \mathbb{A}^1_K \to Y$, der von $\varphi : R := K[x,y]/(y^2 - x^2 - x^3) \to K[t], \bar{x} \to t^2 - 1, \bar{y} \to t^3 - t$ induziert wird. $\bar{x}$ resp. $\bar{y}$ sollen hierbei die Restklassen von x resp. y in $K[x,y]/(y^2 - x^2 - x^3)$ bezeichnen.
Wegen der Irreduzibilität von $y^2 - x^2 - x^3$ im faktoriellen Ring $K[x,y]$ ist wie gesagt $(y^2 - x^2 - x^3)$ prim und damit $R = K[x,y]/(y^2 - x^2 - x^3)$ ein Integritätsbereich. Aus diesem Grund ist $\mathit{Spec}(R) = Y$ integer und wir können die Äquivalenz aus 3.3 anwenden. Zunächst ist $\mathbb{A}^1_K = \mathit{Spec}(K[t])$ als Spektrum eines faktoriellen Rings nach Lemma 5.1

ein normales Schema.
Für den Beweis, dass f birational ist, betrachte die Komposition $R \to K[t] \to K[t]_{t^2-1}$, wobei der letzte Pfeil durch die kanonische Abbildung gegeben ist. Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $R_{\bar{x}} \to K[t]_{t^2-1}, \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \mapsto \frac{t^3-t}{t^2-1} = \frac{t}{1}$. Betrachte umgekehrt den Ringhomomorphismus $K[t] \to R_{\bar{x}}, t \mapsto \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, welcher t^2-1 auf $\frac{\bar{y}^2-\bar{x}^2}{\bar{x}^2} = \bar{x}$ abbildet. Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $K[t]_{t^2-1} \to R_{\bar{x}}$. Offensichtlich sind die beiden konstruierten Ringhomomorphismen invers zueinander und es gilt $\mathbb{A}^1_K \supseteq D(t^2-1) \cong D(x) \subseteq Spec(R) = Y$ mit $D(t^2-1), D(x) \neq \emptyset$. Daher ist f nach Bem. 2.15 birational.
f ist als Morphismus von affinen Schemata offensichtlich affin und
$\varphi : K[x,y]/(y^3-x^2-x^3) \to K[t]$ ist ein ganzer Ringhomomorphismus, da $K[t]|im(\varphi)$ ganz ist. Folglich ist f ein ganzer Morphismus von Schemata. Insgesamt haben wir damit eine Normalisierung von Y und damit eine Auflösung von Singularitäten bestimmt.

Beispiel 5.4 (nach [Mac])
Eine Auflösung von Singularitäten der Kurve $Y = Spec(K[x,y]/(y^2-x^2-x^3)) = V(y^2-x^2-x^3)$ aus Beispiel 5.3 kann auch direkt über die Konstruktion der Normalisierung bestimmt werden.
Sei dazu $Q := Quot(K[x,y]/(y^2-x^2-x^3))$ der Quotientenkörper von $K[x,y]/(y^2-x^2-x^3)$. Betrachten wir $t = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, so ist t ganz über $K[x,y]/(y^2-x^2-x^3)$, da es die normierte Gleichung $t^2 - \bar{x} - 1 = \frac{\bar{y}^2-\bar{x}^3-\bar{x}^2}{\bar{x}^2} = 0$ erfüllt. Weiter gilt wegen den Identifizierungen $\bar{x} = t^2-1$ und $\bar{y} = t^3-t$, dass $K[x,y]/(y^2-x^2-x^3) \subseteq K[t] \subseteq Q$. Insbesondere besitzen $K[x,y]/(y^2-x^2-x^3)$ und $K[t]$ den gleichen Quotientenkörper. Nach Lemma 5.1 ist $K[t]$ ganzabgeschlossen, da es ein faktorieller Ring ist. Damit ist $K[t]$ schon der ganze Abschluss von $K[x,y]/(y^2-x^2-x^3)$ in Q und nach der Konstruktion in 3.3 ist $f : \mathbb{A}^1_K = Spec(K[t]) \to Y$ die Normalisierung von Y. Setzen wir $y = tx$, so wird aus $y^2-x^2-x^3 = 0$ die Gleichung $(t^2-1)x^2 - x^3 = 0$ und wir erhalten $x = t^2-1$ und $y = t^3-t$. Damit können wir folgern, dass die Normalisierung $f : \mathbb{A}^1_K = Spec(K[t]) \to Y$ mit der Abbildung $K[x,y]/(y^2-x^2-x^3) \to K[t], \bar{x} \mapsto t^2-1, \bar{y} \mapsto t^3-t$ korrespondiert.

Beispiel 5.5
$Y = Spec(K[x,y]/(y^2-x^3)) = V(y^2-x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_K$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ erhält man das folgende Bild.



(21)

Die zu $g(x,y) = y^2-x^3$ gehörige Jacobi-Matrix J_g ist gegeben durch $J_g(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 \\ 2y \end{pmatrix}$. Damit ist der einzige singuläre K-rationale Punkt $(0,0)$ (vorausgesetzt $char(K) \notin \{2,3\}$).
Mit derselben Argumentation wie in Bsp. 5.3 folgt aus der Irreduzibilität von $y^2 - x^3$, dass Y ein integres Schema ist.
Die Normalisierung von Y ist dann gegeben durch $f : \mathbb{A}^1_K \to Y$, welcher von $\varphi : K[x,y]/(y^2 - x^3) \to K[t], \bar{x} \mapsto t^2, \bar{y} \mapsto t^3$ induziert wird. Auch hier bezeichnen $\bar{x}$ resp. $\bar{y}$ die Restklassen von x resp. y in $K[x,y]/(y^2 - x^3)$.
Beweisen wir dies: Zunächst ist das affine Schema $\mathbb{A}^1_K = Spec(K[t])$ als Spektrum eines faktoriellen Ringes nach Lemma 5.1 normal. Weiterhin schränkt sich f über die inversen Abbildungen $(t) \mapsto (t^2, t^3)$ und $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$ zu einem Isomorphismus auf den offenen Unterschemata $\mathbb{A}^1_K \backslash \{0\} \cong Y \backslash \{0\}$ ein. Damit ist f nach Bem. 2.15 birational. Offensichtlich ist f affin und da $K[t]|im(\varphi)$ ganz ist, ist mit $\varphi : K[x,y]/(y^3 - x^2) \to K[t]$ ein ganzer Ringhomomorphismus gegeben. Somit ergibt sich, dass f ein ganzer Morphismus von Schemata ist. Insgesamt haben wir mit der Äquivalenz in 3.3 gezeigt, dass $f : \mathbb{A}^1_K \to Y$ eine Normalisierung von Y und damit eine Auflösung von Singularitäten ist.

Literatur

[Lan84] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, 1984.

[Isa94] I. M. Isaacs. *Algebra A Graduate Course*. American Mathematical Society, 1994.

[Liu02] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Bd. 1. Oxford Science Publications, 2002.

[Mat06] H. Matsumura. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, 2006.

[Kol07] J. Kollar. *Lectures on Resolutions of Singularities*. Princeton University Press, 2007.

[GW10] U. Görtz und T. Wedhorn. *Algebraic Geometry I*. Vieweg + Teubner Verlag, 2010.

[Bos13] S. Bosch. *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, 2013.

[LFZ] Z. Luo, E. Feng und J. Zhang. *Computing Singular Points of Projective Plane Algebraic Curves by Homotopy Continuation Methods*. URL: `https://www.hindawi.com/journals/ddns/2014/230847/`.

[Mac] S. Mack-Crane. *Normalization of Algebraic and Arithmetic Curves*. URL: `https://algebrateahousejmath.wordpress.com/2016/11/27/normalization-of-algebraic-and-arithmetic-curves/`.

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und alle Stellen, die ich wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen entnommen habe, als solche kenntlich gemacht habe, und mich keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient habe. Die Arbeit hat in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Essen, den 26. September 2018

. . . .

Katharina Pohl