Programm für das Proseminar

— SPIEGELUNGSGRUPPEN —

Universität Duisburg-Essen
Wintersemester 2024/25

Veranstalter: Prof. Dr. Jan Kohlhaase

Ort und Zeit: WSC-S-U-3.02, Di 14–16

Vorbesprechung: 03.09.24, 14:15 Uhr, WSC-N-U-2.04
Anmeldung: jederzeit per E-Mail an jan.kohlhaase@uni-due.de

Das Proseminar gibt eine Einführung in die Theorie der Spiegelungsgruppen. Benötigt werden dafür lediglich Grundkenntnisse aus der linearen Algebra und etwas Gruppentheorie.

Zusammenfassung: Spiegelungen in der Ebene und im Raum sind grundlegende geometrische Operationen, die schon in der Schule behandelt werden. Spiegelungsgruppen sind Gruppen (affin) linearer Transformationen eines Vektorraums, die durch Spiegelungen an (affinen) Hyperebenen erzeugt werden. Die endlichen Spiegelungsgruppen der Ebene und des Raumes bilden ein klassisches Gebiet mit Anwendungen auf die Klassifikation von Ornamenten und Kristallen. Außerdem stehen viele endliche Spiegelungsgruppen mit sogenannten Wurzelsystemen in Beziehung, die viele innermathematische Anwendungen haben wie zum Beispiel die Klassifikation halbeinfacher Liealgebren.

Behandelte Themen: Gruppentheoretische Grundlagen, Isometrien euklidischer Vektorräume, Drehungen, Spiegelungen, Translationen, Gitter und kristallographische Gruppen, die endlichen Spiegelungsgruppen der Ebene und des Raumes, die Klassifikation von Ornamenten und Kristallen, Wurzelsysteme und ihre Klassifikation

1. Gruppentheoretische Grundlagen [08.10.]: Gruppen, Untergruppen und Gruppenhomomorphismen können als bekannt vorausgesetzt werden (ggf. kurz wiederholen); Normalteiler $N \trianglelefteq G$ und die Faktorgruppe G/N mit Multiplikation $(gN) \cdot (hN) = ghN$; (äußere) direkte Produkte $G \times G'$ und (innere) semidirekte Produkte $G = N \rtimes H$; Beispiele von Gruppen (die symmetrische Gruppe S_n, die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, die Diedergruppe D_n als Symmetriegruppe des regelmäßigen n-Ecks); vgl. [8], §§3.1.5, 3.2, 4.1, 4.3, 5.2, 6.1, 6.4.1

2. Isometrien [15.10.]: Der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^n$, das Standardskalarprodukt $\langle u, v\rangle$, die Norm $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, der Abstand $d(u, v) = ||u - v||$ und die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid {}^tA \cdot A = I_n\}$ können als bekannt vorausgesetzt werden (ggf. kurz wiederholen); die Untergruppe $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$ heißt die spezielle orthogonale Gruppe und ihre Elemente Drehungen (oder Rotationen); die Gruppe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ der Isometrien des $\mathbb{R}^n$; Beispiele von Isometrien: Translationen und Spiegelungen an (affinen) Hyperebenen; die Struktur $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$; jede Isometrie des $\mathbb{R}^n$ ist ein Produkt von höchstens $n + 1$ (affinen) Spiegelungen; vgl. [2], §6.2, [3], §§II.1–II.2, [5], §2 and [12], §B3

3. Gitter und kristallographische Gruppen [22.10.]: Gitter (englisch $lattices$) im $\mathbb{R}^n$; Charakterisierung als diskrete Untergruppen, die eine Basis enthalten (vgl. [12], Hauptsatz B4.4; es genügt $(i) \Rightarrow (ii)$); die Symmetriegruppe $\mathrm{Sym}(\Gamma) = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(\Gamma) = \Gamma\}$ und die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\Gamma) = \{f \in \mathrm{O}(n) \mid f(\Gamma) = \Gamma\}$ eines Gitters $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$; die Struktur $\mathrm{Sym}(\Gamma) = \Gamma \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$; die Endlichkeit von $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ (vgl. [12], Satz B4.7); kristallographische Gruppen (vgl. [12], Definition B5.1); die Punktgruppe einer kristallographischen Gruppe (vgl. [12], Definition B3.7); die Punktgruppe einer kristallographischen Gruppe ist endlich (vgl. [12], Satz B5.3)

4. Isometrien der Ebene [29.10.]: der Isomorphismus $\mathrm{SO}(2) \cong \mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (vgl. [3], Theorem II.3.4); jede Isometrie der Ebene ist eine Translation, eine Rotation, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung; die endlichen Untergruppen von $\mathrm{O}(2)$ sind genau die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und die Diedergruppen D_n mit $n \in \mathbb{N}$; vgl. [2], §§6.3–6.4, [4], §§2.1–2.2, [9], Satz 7.3, [11], §4,

5. Die 17 Ornamentgruppen [05.11.]: Die kristallographischen Gruppen der Ebene werden auch Ornamentgruppen genannt; die kristallographische Einschränkung und die möglichen Punktgruppen einer Ornamentgruppe (vgl. [1], Theorem 25.3, [2], Theorem 6.5.12, und [7], Proposition 2.8 bzw. [12], Hilfssatz D10.5 für eine allgemeinere Fassung; die Spuren der Rotationsmatrizen sind ganze Zahlen, weil es sich um Automorphismen eines Gitters handelt); die fünf Typen von Gittern der Ebene (vgl. [1], S. 149); erklären Sie einzelne Fälle des Klassifikationssatzes (z.B. anhand von [1], §26 oder [2], Proposition 6.6.3/4); Überblick über die 17 Ornamentgruppen (vgl. [9], S. 8–13; die zugehörigen Punktgruppen sind in [1], S. 161 zu finden)

6. Isometrien des Raumes [12.11.]: geometrische Interpretation von $A \in \mathrm{O}(3)$ in Abhängigkeit von $\det(A) \in \{-1, 1\}$ (vgl. [4], Theorems 2.3.1/2); konvexe Polyeder und die Euler'sche Polyederformel; Überblick über die platonischen Körper und ihre Symmetriegruppen; die Konjugationsklassen der endlichen Untergruppen von $\mathrm{SO}(3)$ und $\mathrm{O}(3)$ (erklären Sie die grundlegende Strategie, die Pole einer endlichen Rotationsgruppe zu betrachten); vgl. [3], IV.4–IV.5, [4], 2.3–2.5, [10], Theorems 17.10/11, [12], §§D10.1–D10.2c

7. Die kristallographischen Gruppen des Raumes [19.11.]: erinnern Sie an die Definition einer kristallographischen Gruppe und die kristallographische Einschränkung; geben Sie (bis auf Konjugation) die 32 Punktgruppen der kristallographischen Gruppen des Raumes an (vgl. [4], §2.5); isomorphe kristallographische Gruppen haben isomorphe Punktgruppen (vgl. [12], §B5.1c); geometrische Äquivalenz von kristallographischen Gruppen (vgl. [12], Definition B5.13); zwei kristallographische Gruppen sind genau dann geometrisch äquivalent, wenn ihre Punktgruppen in $\mathrm{O}(n)$ konjugiert sind (vgl. [12], §§C2.6a/b); berichten Sie, dass es zu jeder endlichen Untergruppe von $\mathrm{O}(3)$ mindestens ein invariantes Gitter gibt und dass es bis auf Konjugation 219 kristallographische Gruppen des Raumes gibt (bei Berücksichtigung der Orientierung 230); vgl. [13], §§3.4–3.6, inklusive eines der Beispiele auf S. 115

8. Endliche Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme [26.11.]: Erzeugendensysteme von Gruppen (vgl. [8], §3.1.2 und Satz 3.2); endliche Spiegelungsgruppen sind per Definition endliche Untergruppen von $\mathrm{O}(n)$, die von Spiegelungen erzeugt werden; die Beispiele A_n, B_n und D_n; (reduzierte) Wurzelsysteme; das Endlichkeitslemma; strikt stumpfe/spitze Winkel zwischen Wurzeln; erste Beispiele von Wurzelsystemen; die Zerlegung von Wurzelsystemen in irreduzible Komponenten; vgl. [7], §§I.1–I.2 und [6], §§11.1–11.2

9. Basen von Wurzelsystemen [03.12.]: der Begriff der Basis eines Wurzelsystems; Beispiele von Basen; die Existenz von Basen; die Menge der positiven/negativen Wurzeln; die Weylgruppe eines Wurzelsystems; die Endlichkeit der Weylgruppe; jede Wurzel ist das Bild eines Basiselements unter der Operation der Weylgruppe; die Weylgruppe wird von den Spiegelungen der Basiselemente erzeugt; das duale Wurzelsystem und die duale Basis; duale Wurzelsysteme haben isomorphe Weylgruppen; vgl. [6], §11.3 und Übungsaufgabe 11.13 (siehe auch [7], S. 39/40)

10. Cartan-Matrizen und Dynkin-Diagramme [10.12.]: Je zwei Basen werden durch ein Element der Weylgruppe ineinander überführt (vgl. [6], Theorem 11.16; skizzieren Sie Teile des Beweises in [loc.cit.], Theorem 19.1); die Cartan-Matrix eines Wurzelsystems; Unabhängigkeit der Cartan-Matrix von der Wahl der Basis; das Dynkin-Diagramm und der Coxeter-Graph eines Wurzelsystems; Beispiele von Cartan-Matrizen, Dynkin-Diagrammen und Coxeter-Graphen; duale Wurzelsysteme haben transponierte Cartan-Matrizen; Isomorphismen von Wurzelsystemen; Wurzelsysteme mit demselben Dynkin-Diagramm sind isomorph; vgl. [6], §11.4

11. Klassifikation von Dynkin-Diagrammen [17.12.]: die Dynkin-Diagramme A_ℓ $(\ell \geq 1)$, B_ℓ $(\ell \geq 2)$, C_ℓ $(\ell \geq 3)$, D_ℓ $(\ell \geq 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2; das Dynkin-Diagramm jedes irreduziblen Wurzelsystems ist genau eines der vorstehenden Diagramme; vgl. [6], §13.1

12. Konstruktion von Wurzelsystemen [24.01.]: Zu jedem der obigen Dynkin-Diagramme gibt es ein zugehöriges irreduzibles Wurzelsystem; geben Sie in allen Fällen die (Ordnung der) Weylgruppe an und führen Sie in einigen Beispielen die notwendigen Argumente aus; vgl. [7], §2.10 und [6], §13.2 und 19.3

13. Die Längenfunktion [07.01.]: reduzierte Darstellungen; die Länge $\ell(w)$ eines Elementes in der Weylgruppe eines Wurzelsystems; die Zahl $n(w)$ positiver Wurzeln, die von w auf negative Wurzeln abgebildet werden; die Streichungsbedingung und die Gleichung $n(w) = \ell(w)$; die Austauschbedingung; die Weylgruppe eines Wurzelsystems operiert einfach transitiv auf der Menge der Basen; das längste Element der Weylgruppe; vgl. [7], §§1.6–1.8

14. Fundamentalbereiche [14.01.]: Fundamentalbereiche endlicher Spiegelungsgruppen; die Fundamentalbereiche von Weylgruppen sind abgeschlossene Kegel; die Kammern eines Wurzelsystems; skizzieren Sie die Kammern in den Fällen A_2, B_2 und G_2 (vgl. [6], S. 113); jede Spiegelung in einer Weylgruppe ist die Spiegelung an einer Wurzel; vgl. [4], §3 und [7], §§1.12/14

Literatur

[1] M. Armstrong: *Groups and Symmetry*, Springer, 1988

[2] M. Artin: *Algebra*, 2nd Edition, Verlag PHI, 2011

[3] M. Audin: *Geometry*, Universitext, Springer, 2003

[4] C. Benson, L. Grove: *Finite Reflection Groups*, 2nd Edition, Springer, 1985

[5] A. Borovik, A. V. Borovik: *Mirrors and Reflections*, Universitext, Springer, 2010

[6] K. Erdmann, M. Wildon: *Introduction to Lie Algebras*, Springer, 2006

[7] J. Humphreys: *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press, 1990

[8] C. Karpfinger, K. Meyberg: *Algebra*, 5. Auflage, Springer Spektrum, 2021

[9] M. Klemm: *Symmetrien von Ornamenten und Kristallen*, Springer, 1982

[10] G. Martin: *Transformation Geometry*, Springer, 1982

[11] B. Roberts: Lecture Notes Reflection Groups, online erhältlich

[12] R. Strebel: Skriptum Kristallographische Gruppen, online erhältlich

[13] P. Yale: *Geometry and Symmetry*, Holden-Day, 1968

Anmerkung: Die Literatur ist teilweise frei zugänglich und wird über den Moodle-Kursraum zur Verfügung gestellt.