Masterarbeit

Überkonvergenz p-adischer Galoisdarstellungen im maximal abelschen Fall

Vorgelegt der
Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen

Von:
Daniel Wahlers
Matr.-Nr. 2286622

Betreut von:
Prof. Dr. J. Kohlhaase

18. Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Zahlentheorie ist die Untersuchung der absoluten Galoisgruppe Gal$(L^{sep}|L)$ für einen nicht-archimedischen Körper L von wesentlicher Bedeutung. Für vollständige, diskret bewertete Körper E haben wir in der Vorlesung „p-adische Galoisdarstellungen“ im Sommersemester 2015 von Prof. Dr. J. Kohlhaase die Kategorie der endlich erzeugten stetigen $\mathbb{Z}_p$-Darstellungen von Gal$(E^{sep}|E)$ in Beziehung zu den étalen φ-Moduln über einem Cohenring von E setzen können. Außerdem konnten wir dieses Resultat über den Satz von Fontaine und Winterberger, der besagt, dass für einen perfektoiden Körper K die Galoisgruppen Gal$(K^{sep}|K)$ und Gal$((K^\flat)^{sep}|K^\flat)$ isomorph sind, zu einer Kategorienäquivalenz zwischen den stetigen $\mathbb{Q}_p$-Darstellungen von Gal$(\mathbb{Q}_p^{sep}|\mathbb{Q}_p)$ und den étalen (φ, Γ)-Moduln über einem Cohenring von $\mathbb{F}_p((t))$ überführen. In dieser Situation wählt man den Körper $K = \widehat{\mathbb{Q}_p[\mu_{p^\infty}]}$. Dies ermöglicht es, die Galoisgruppe mit Hilfe semilinearer Algebra zu untersuchen.

Durch den Übergang zu überkonvergenten (φ, Γ)-Moduln erhält man Zugriff auf weitere Methoden. Dieser Übergang wurde im klassischen Fall $K = \widehat{\mathbb{Q}_p[\mu_{p^\infty}]}$ von Cherbonnier und Colmez bewiesen, siehe [CheCol] Theorem II.3.2 oder auch Theorem 2.6.2 von [Ked]. Ein ähnliches Resultat wollen wir hier für den Körper $K = \widehat{L^{ab}}$ zeigen, wobei L eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ ist. In diesem Fall ist der Überkonvergenzsatz ein aktuelles Resultat von de Shalit und Porat (siehe [ShaPor]). Wir werden wiederholen, inwiefern die Kategorie $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ der stetigen $\mathfrak{o}$-Darstellungen von $G = \mathrm{Gal}(\bar{L}|L)$ äquivalent zur Kategorie der étalen (φ, Γ)-Moduln ist und dann ausführlich beweisen, dass diese wiederum äquivalent zu der Kategorie der überkonvergenten étalen (φ, Γ)-Moduln ist. Dass dieser Übergang zu überkonvergenten (φ, Γ)-Moduln nicht in jeder Situation möglich ist, zeigt [FouXie]. In Theorem 0.6 wird dort behauptet, dass in der dortigen Situation Lubin-Tate (φ, Γ)-Moduln nicht notwendigerweise überkonvergent sind.

Für diese Arbeit werden wir in den folgenden beiden Kapiteln einen Überblick über die Theorie der verzweigten Wittvektoren und des Tiltingverfahrens gewinnen. Wir orientieren uns dabei an [Sch17] und verweisen für die meisten der Beweise auf diese Quelle. Mit Hilfe dieser Theorien werden wir den Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L$ konstruieren, der es im vierten Kapitel ermöglicht, die Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ und $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ vorzustellen. Dabei werden wir auf die Beweise verzichten und verweisen hierfür auf unsere Hauptquelle [ShaPor]. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf dem letzten Kapitel, der Äquivalenz zwischen $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ und $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$. Hier werden wir den Unterring $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L$ der überkonvergenten Elemente von $\tilde{\mathbb{A}}_L$ konstruieren. Der Basiswechsel $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$ für einen (φ, Γ)-Modul $M^\dagger$ über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ wird eine Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ und $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ induzieren. Insbesondere ist damit jede Galoisdarstellung $V \in \mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ überkonvergent (vergleiche Satz 5.21).

2 Verzweigte Wittvektoren

Im Folgenden orientieren wir uns an Kapitel 1.1 von [Sch17], um die Konstruktion des Rings der verzweigten Wittvektoren vorzustellen. Wir fixieren eine Primzahl p und eine endliche Körpererweiterung $L|\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen. Mit $\mathfrak{o}$ bezeichnen wir den diskreten Bewertungsring von L, mit $\pi \in \mathfrak{o}$ ein uniformisierendes Element und mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{o}/\pi\mathfrak{o}$ den zugehörigen Restklassenkörper mit $q = p^f$ Elementen. Die im Folgenden für eine perfekte $\mathfrak{K}$-Algebra B konstruierte $\mathfrak{o}$-Algebra $W(B)_L$ bildet die Grundlage für die Konstruktion der Ringe $\tilde{\mathbb{A}}$ und $\tilde{\mathbb{A}}_L$ und damit auch für $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$ und $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$.

2.1 Die Wittpolynome

Definition 2.1
Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt das Polynom

$$\Phi_n(X_0, \ldots, X_n) := \sum_{i=0}^{n} \pi^i X_i^{q^{n-i}} \in \mathfrak{o}[X_0, X_1, \ldots, X_n] \subseteq \mathfrak{o}[X_0, X_1, \ldots]$$

das *n-te Wittpolynom.*

Bemerkung 2.2 (Beziehung zwischen Wittpolynomen)
Aus der Definition der Wittpolynome erhalten wir

(i) $\Phi_0(X_0) = X_0$ und $\Phi_1(X_0, X_1) = X_0^q + \pi X_1$.

(ii) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}(X_0, \ldots, X_{n+1}) &= \Phi_n\left(X_0^q, \ldots, X_n^q\right) + \pi^{n+1} X_{n+1} \\ &= X_0^{q^{n+1}} + \pi \Phi_n(X_1, \ldots, X_{n+1}).\end{aligned}$$

Sei nun B eine kommutative unitäre $\mathfrak{o}$-Algebra.

Lemma 2.3
Ist $I \subseteq B$ ein Ideal mit $\pi B \subseteq I$, so ist für $m, n \geq 1$ und $b_1 \equiv b_2 \mod I^m$ bereits $b_1^{q^n} \equiv b_2^{q^n} \mod I^{m+n}$.

Beweis: Ein Spezialfall liefert das Lemma 1.1.1 von [Sch17]. Der Beweis lässt sich übertragen. Wir können induktiv $n = 1$ annehmen. Ist $b_1 \equiv b_2 \mod I^m$, so ist $b_1^q - b_2^q = (b_1 - b_2) \sum_{i=0}^{q-1} b_1^i b_2^{q-1-i} =: (b_1 - b_2) P(b_1, b_2)$. Nun ist $P(b_1, b_2) \equiv P(b_1, b_1) \equiv q b_1^{q-1} \mod I$, und da $q \cdot 1_B \in \pi B \subseteq I$ ist, erhalten wir $b_1^q \equiv b_2^q \mod I^m$. □

Lemma 2.4
Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in B$.

i) Falls $a_i \equiv b_i \mod \pi^m B$ für alle $0 \leq i \leq n$ gilt, so gilt für alle $0 \leq i \leq n$

$$\Phi_i(a_0, \ldots, a_i) \equiv \Phi_i(b_0, \ldots, b_i) \mod \pi^{m+i} B.$$

ii) Falls $\pi \cdot 1_B \in B$ kein Nullteiler ist, dann ist auch die umgekehrte Richtung in i) wahr.

Beweis: Diese Aussage findet sich in Lemma 1.1.2 in [Sch17] wieder. $\square$

Betrachten wir nun die $\mathfrak{o}$-Algebra

$$B^{\mathbb{N}} := \prod_{n\geq 0} B = \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : b_n \in B\}$$

mit den komponentenweisen Operationen und die Abbildungen

$f_B\colon B^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}, (b_0, b_1, \dots) \mapsto (b_1, b_2, \dots)$ Hom. von $\mathfrak{o}$-Algebren,
$v_B\colon B^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}, (b_0, b_1, \dots) \mapsto (0, \pi b_0, \pi b_1, \dots)$ Hom. von $\mathfrak{o}$-Moduln,
$\Phi_n\colon B^{\mathbb{N}} \to B\ , (b_0, b_1, \dots) \mapsto \Phi_n(b_0, \dots, b_n) \in B$ Polynomabb.,
$\Phi_B\colon B^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}, (b_0, b_1, \dots) \mapsto (\Phi_n(b_0, \dots, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Abb. von Mengen.

Lemma 2.5
Für eine $\mathfrak{o}$-Algebra B gilt,

i) falls $\pi \cdot 1_B \in B$ kein Nullteiler ist, dann ist Φ_B injektiv.

ii) Falls $\pi \cdot 1_B \in B$ eine Einheit ist, so ist Φ_B bijektiv.

Beweis: Dies entspricht Lemma 1.1.3 von [Sch17]. $\square$

Proposition 2.6
Sei $\phi\colon B \to B$ ein Endomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren mit $\phi(b) \equiv b^q \mod \pi B$ für alle $b \in B$.

i) Falls $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$, $u_i := \Phi_i(b_0, \dots, b_i)$ für $0 \leq i \leq n-1$ und falls $u_n \in B$ ist, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $\exists b_n \in B : u_n = \Phi_n(b_0, \dots, b_n)$,

(b) $\phi(u_{n-1}) \equiv u_n \mod \pi^n B$.

ii) $B' := \Phi_B\left(B^{\mathbb{N}}\right) \subseteq B^{\mathbb{N}}$ ist eine $\mathfrak{o}$-Unteralgebra von $B^{\mathbb{N}}$ mit

a) $f_B\left(B'\right) \subseteq B'$,

b) $v_B\left(B'\right) \subseteq B'$,

c) $B' = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}} : \phi(u_n) \equiv u_{n+1} \mod \pi^{n+1} B \ \forall n \geq 0\right\}$.

Beweis: Hierfür sei auf Proposition 1.1.5 von [Sch17] verwiesen. $\square$

Dieses Resultat hilft uns unter anderem dabei, den Ring der verzweigten Wittvektoren als eine $\mathfrak{o}$-Algebra aufzufassen. Die Identität auf $\mathfrak{o}$ erfüllt die Bedingung $id(\lambda) \equiv \lambda^q \mod \pi\mathfrak{o}$ und daher finden wir zu $\lambda \in \mathfrak{o}$ ein Element $\Omega(\lambda) \in \mathfrak{o}^{\mathbb{N}}$ mit $\Phi_{\mathfrak{o}}(\Omega(\lambda)) = (\lambda, \lambda, \dots)$. Dieses Element ist nach Lemma 2.5 eindeutig bestimmt durch λ, da $\pi \in \mathfrak{o}$ kein Nullteiler ist.

Beispiel 2.7
Wegen $\Phi_0(X) = X$ ist $\Omega_0(\lambda) = \Phi_0(\Omega(\lambda)) = \lambda$.

Wir betrachten nun die $\mathfrak{o}$-Algebra $A = \mathfrak{o}[X_0, X_1, \dots, Y_0, Y_1, \dots]$ und den Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren $\phi\colon A \to A$, $f(X_0, X_1, \dots, Y_0, Y_1, \dots) \mapsto f(X_0^q, X_1^q, \dots, Y_0^q, Y_1^q, \dots)$ zusammen mit den Elementen $X := (X_0, X_1, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ und $Y := (Y_0, Y_1, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$.

Bemerkung 2.8
Mit Hilfe von A werden wir die Ringstruktur der Wittvektoren konstruieren. Es gilt, dass

i) die Multiplikation mit $\pi 1_A$ injektiv auf A ist, also ist Φ_A injektiv nach Lemma 2.5i).

ii) Da $A/\pi A \cong \mathfrak{K}[X_0, X_1 \dots, Y_0, Y_1 \dots]$ und $x \mapsto x^q$ auf $\mathfrak{K}$ die Identität ist, erhalten wir die Kongruenz $\phi(f) \equiv f^q \mod \pi A$ für alle $f \in A$.

2.2 Die Ringstruktur der verzweigten Wittvektoren

Proposition 2.9

i) Es existieren eindeutige Elemente $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A^{\mathbb{N}}$, sodass in $A^{\mathbb{N}}$ Folgendes gilt:

a) $\Phi_A(S) = \Phi_A(X) + \Phi_A(Y)$,

b) $\Phi_A(P) = \Phi_A(X) \cdot \Phi_A(Y)$,

c) $\Phi_A(I) = -\Phi_A(X)$,

d) $\Phi_A(F) = f_A(\Phi_A(X))$.

ii) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $S_n, P_n \in \mathfrak{o}[X_0, \dots X_n, Y_0, \dots Y_n]$, $I_n \in \mathfrak{o}[X_0, \dots, X_n]$ und $F_n \in \mathfrak{o}[X_0, \dots, X_{n+1}]$.

iii) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die Kongruenz $F_n \equiv X_n^q \mod \pi A$.

Beweis: Für den ersten Teil bemerken wir, dass die Eindeutigkeit aus der Injektivität von Φ_A folgt. Die Existenz folgt aus Proposition 2.6. Für den restlichen Beweis sei auf Lemma 1.1.7 und den Abschnitt auf Seite 11 in [Sch17] verwiesen. □

Beispiel 2.10
Wegen $\Phi_0(X) = X_0$ ist $S_0(X_0, Y_0) = X_0 + Y_0$ und $P_0(X_0, Y_0) = X_0 Y_0$.

Für eine $\mathfrak{o}$-Algebra B setzen wir $W(B)_L = B^{\mathbb{N}}$ als Menge mit den binären Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$, gegeben durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (S_n(a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots))_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\text{und } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \odot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (P_n(a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Setzen wir weiter $0_{W(B)_L} := (0_B, 0_B, \dots)$ und $1_{W(B)_L} := (1_B, 0_B, 0_B, \dots)$, so können wir den ersten wichtigen Satz des Kapitels formulieren:

Satz 2.11 (Witt)
Sei B eine $\mathfrak{o}$-Algebra.

i) $(W(B)_L, \oplus, \odot)$ ist ein kommutativer Ring mit Nullelement $0_{W(B)_L}$ und Einselement $1_{W(B)_L}$. Das additive Inverse von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(I_n(b_0, \dots, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Die Abbildung $\Omega\colon \mathfrak{o} \to (W(B)_L, \oplus, \odot)$ ist ein Ringhomomorphismus, der $(W(B)_L, \oplus, \odot)$ zu einer $\mathfrak{o}$-Algebra macht.

iii) Die Abbildung $\Phi_B\colon W(B)_L \to B^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\Phi_n(b_0,\dots,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren.
Insbesondere ist $\Phi_m\colon W(B)_L \to B$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \Phi_m(b_0,\dots,b_m)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren für alle $m \geq 0$.

iv) Falls $\rho\colon B_1 \to B_2$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren ist, dann ist

$$W(\rho)_L := \big((b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\rho(b_n))_{n\in\mathbb{N}}\big) : W(B_1)_L \to W(B_2)_L$$

ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren.

Beweis: Wir verweisen hier auf Proposition 1.1.8 von [Sch17]. □

2.3 Die Frobenius- und Verschiebungsabbildung

Definition 2.12
Sei B eine $\mathfrak{o}$-Algebra.

i) $(W(B)_L, \oplus, \odot)$ wird *Ring der verzweigten Wittvektoren mit Koeffizienten in B* genannt.

ii) Für $b = (b_0, b_1, \dots) \in W(B)_L$ heißt $\Phi_n(b_0,\dots,b_n) \in B$ die *n-te Geisterkomponente von b*.

iii) $F\colon W(B)_L \to W(B)_L$, $(b_n)_n \mapsto (F_n(b_0, b_1, \dots))_n$ heißt *Frobeniusabbildung*.

iv) $V\colon W(B)_L \to W(B)_L, (b_0, b_1 \dots) \mapsto (0, b_0, b_1, \dots)$ heißt *Verschiebungsabbildung*.

Bemerkung 2.13
Nach Konstruktion von $(F_n)_n$ und Bemerkung 2.2 kommutieren die Diagramme:

$$\begin{tikzcd} W(B)_L \arrow[r, "\Phi_B"] \arrow[d, "F"] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "f_B"] \\ W(B)_L \arrow[r, "\Phi_B"] & B^{\mathbb{N}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W(B)_L \arrow[r, "\Phi_B"] \arrow[d, "V"] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "v_B"] \\ W(B)_L \arrow[r, "\Phi_B"] & B^{\mathbb{N}}. \end{tikzcd}$$

Dies hilft insbesondere beim Beweis der nachfolgenden Proposition, auf den wir allerdings nicht weiter eingehen wollen.

Proposition 2.14
Sei B eine $\mathfrak{o}$-Algebra.

i) F ist ein Endomorphismus der $\mathfrak{o}$-Algebra $W(B)_L$.

ii) V ist ein Endomorphismus des $\mathfrak{o}$-Moduls $W(B)_L$.

iii) Für alle $b \in W(B)_L$ gilt $(F \circ V)(b) = \pi b$.

iv) Für alle $a, b \in W(B)_L$ gilt $V(a \odot F(b)) = V(a) \odot b$.

v) Für alle $b \in W(B)_L$ gilt $F(b) \equiv b^q \mod \pi W(B)_L$.

Beweis: Für den Beweis sei auf Proposition 1.1.10 [Sch17] verwiesen. $\square$

Für $m \geq 0$ definieren wir $V_m(B)_L := \operatorname{Im}(V^m) = \{(b_n)_n \in W(B)_L \colon b_0 = \ldots = b_{m-1} = 0\}$. Dies liefert uns nach 2.14ii) und iv) eine absteigende Kette $W(B)_L = V_0(B)_L \supseteq V_1(B)_L \supseteq \ldots$ von Idealen mit

$$\bigcap_{m \geq 0} V_m(B)_L = \left\{0_{W(B)_L}\right\}.$$

Definition 2.15
Für eine $\mathfrak{o}$-Algebra B heißt $W_m(B)_L := W(B)_L / V_m(B)_L$ der *Ring der verzweigten Wittvektoren der Länge* m.

Lemma 2.16
Sei B eine $\mathfrak{o}$-Algebra.

i) Für $m \geq 1$ und $(b_n)_n \in W(B)_L$ gilt

$$(b_n)_n = (b_0, \ldots, b_{m-1}, 0, 0, \ldots) \oplus (0, \ldots, 0, b_m, b_{m+1}, \ldots),$$

ii) die Abbildung $B^m \to W_m(B)_L$, $(b_0, \ldots, b_{m-1}) \mapsto (b_0, \ldots, b_{m-1}, 0, 0, \ldots) \oplus V_m(B)_L$ ist für $m \geq 1$ eine Bijektion von Mengen.

Beweis: Vergleiche Lemma 1.1.13 von [Sch17]. $\square$

Bemerkung 2.17
Nach 2.11iii) und 2.16ii) ist $\Phi_0 : W(B) \to B$, $(b_n)_n \mapsto b_0$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren mit Kern $V_1(B)$. Wir erhalten einen Isomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren

$$W_1(B)_L = W(B)_L / V_1(B)_L \cong B.$$

Lemma 2.18
Die Abbildung $\tau : B \to W(B)_L$, $b \mapsto (b, 0, 0, \ldots)$ ist multiplikativ.

Beweis: Vergleiche Lemma 1.1.15 in [Sch17]. $\square$

Bemerkung 2.19
τ ist ein mengentheoretischer Schnitt des Homomorphismus $W(B)_L \to B$, $b = (b_n)_n \mapsto b_0$. Damit ist

$$b + V_1(B) = \tau(b_0) + V_1(B).$$

τ wird auch *Teichmüller-Lift* genannt.

Lemma 2.20
Für alle $k \geq 1$ gilt $V_1(B)_L^k = \pi^{k-1} \cdot V_1(B)_L$.

Beweis: Vergleiche Lemma 1.1.17 in [Sch17]. $\square$

2.4 Eigenschaften des Rings der Wittvektoren

Definition 2.21
Für eine $\mathfrak{K}$-Algebra B ist $(b \mapsto b^q)\colon B \to B$ ein Endomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren, der *Frobenius* genannt wird. B wird *perfekt* genannt, wenn der Frobeniusendomorphismus bijektiv ist.

Satz 2.22
Sei B eine $\mathfrak{K}$-Algebra.

i) *Für $b = (b_n)_n \in W(B)_L$ gilt $F(b) = (b_n^q)_n$.*

ii) *Es ist $\pi b = V \circ F(b) = F \circ V(b) = (0, b_0^p, b_1^p, \dots)$ für $b = (b_n)_n \in W(B)_L$.*

iii) *Für alle $n, m \geq 0$ gilt $V_m(B)_L \odot V_n(B)_L \subseteq V_{m+n}(B)_L$.*

iv) *Für alle $k \geq 1$ gilt $\pi^k W(B)_L \subseteq V_1(B)_L^k \subseteq \pi^{k-1} W(B)_L$.*

v) *Der natürliche Algebrahomomorphismus $W(B)_L \to \varprojlim_k W(B)_L/\pi^k W(B)_L$ ist bijektiv. Insbesondere ist $W(B)_L$ π-adisch separiert und vollständig.*

Beweis: Vergleiche Proposition 1.1.18 von [Sch17]. □

Proposition 2.23
Sei B eine perfekte $\mathfrak{K}$-Algebra.

i) *Für $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in W(B)_L$ und $m \geq 1$ gilt*

$$b \oplus V_m(B)_L = \sum_{i=0}^{m-1} \pi^i \tau\left(b_i^{q^{-i}}\right) \oplus V_m(B)_L,$$

ii) *für alle $m \geq 0$ gilt $V_m(B)_L = \pi^m W(B)_L = V_1(B)_L^m$.*

Beweis: Vergleiche mit Proposition 1.1.19 in [Sch17]. □

Satz 2.24
Sei B eine Körpererweiterung von $\mathfrak{K}$. Dann gilt:

i) *$W(B)_L$ ist ein Integritätsbereich mit eindeutigem maximalem Ideal $V_1(B)_L = \mathrm{Im}(V)$.*

ii) *Falls B zusätzlich perfekt ist, so ist $W(B)_L$ ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer π und Restklassenkörper B. Für $b = (b_n)_n \in W(B)_L$ gilt $b = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n \tau\left(b_n^{q^{-n}}\right)$.*

Beweis: Vergleiche Proposition 1.1.21 von [Sch17]. □

Lemma 2.25
Sei B eine Körpererweiterung von $\mathfrak{K}$. Dann hat der Körper $\mathrm{Quot}(W(B)_L)$ die Charakteristik 0.

Beweis: Siehe Bemerkung 1.1.22 von [Sch17]. □

Proposition 2.26
Angenommen, $\pi 1_B$ ist kein Nullteiler in einer $\mathfrak{o}$-Algebra B und B besitzt einen Endomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren σ mit $\sigma(b) \equiv b^q \mod \pi B$ für jedes $b \in B$. Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren $s_B \colon B \to W(B)_L$, sodass $\Phi_n \circ s_B = \sigma^n$ für jedes $n \geq 0$. Überdies ist s_B injektiv.

Beweis: Vergleiche mit Proposition 1.1.23 aus [Sch17]. □

Korollar 2.27
Sei B eine $\mathfrak{o}$-Algebra. Unter den Voraussetzungen

a) $\pi 1_B$ ist kein Nullteiler in B,

b) $B/\pi B$ ist perfekt,

c) die natürliche Abbildung $B \to \varprojlim_m B/\pi^m B$ ist bijektiv und

d) B besitzt einen Endomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren σ, sodass $\sigma(b) \equiv b^q \mod \pi B$ für ein $b \in B$

ist die Verknüpfung $B \to W(B)_L \to W(B/\pi B)_L$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren.

Beweis: Für einen Beweis siehe [Sch17] Korollar 1.1.24. □

Beispiel 2.28
Der Bewertungsring $\mathbb{Z}_p$ der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ ist eine $\mathbb{Z}_p$-Algebra, in der p kein Nullteiler ist. Der Restklassenkörper $\mathbb{F}_p$ ist perfekt und außerdem ist $\mathbb{Z}_p$ vollständig und separiert. Die Identität auf $\mathbb{Z}_p$ erfüllt $id(x) = x^p \mod p\mathbb{Z}_p$ für alle $x \in \mathbb{Z}_p$. Insgesamt ist also $W(\mathbb{F}_p)_{\mathbb{Q}_p} \cong \mathbb{Z}_p$ nach Korollar 2.27. Allgemeiner gilt sogar

Korollar 2.29
Es gilt $W(\mathfrak{K})_L \cong \mathfrak{o}$.

Beweis: Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem vorigen Korollar für $B = \mathfrak{o}$, da $\mathfrak{o}/\pi\mathfrak{o} \cong \mathfrak{K}$. □

Lemma 2.30
Ist R eine π-adische separierte und vollständige $\mathfrak{o}$-Algebra, sodass die $\mathfrak{K}$-Algebra $\mathcal{L} := R/\pi R$ perfekt ist, so existiert genau eine multiplikative Abbildung $s \colon \mathcal{L} \to R$, sodass die Verkettung mit $\alpha \colon R \to \mathcal{L}$ die Identität auf $\mathcal{L}$ ist.

Beweis: Zu $x \in \mathcal{L}$ wählen wir induktiv $a_i \in R$ mit $\alpha(a_1)^q = x$ und $\alpha(a_{i+1})^q = \alpha(a_i)$, wobei wir die Perfektheit von $\mathcal{L}$ ausnutzen. Wir finden $\alpha(a_{i+1})^q = \alpha(a_i)$, also $a_{i+1}^q \equiv a_i \mod \pi R$. Nach 2.3 ist $a_{i+1}^{q^{i+1}} \equiv a_i^{q^i} \mod \pi^{i+1} R$, also bildet $(a_i^{q^i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im π-adisch vollständigen Ring R. Wir setzen $s(x) = \lim_{i \to \infty} a_i^{q^i} \in R$. Nach Konstruktion erfüllt dies die Bedingung $\alpha(s(x)) = x$, denn $\alpha(a_i^{p^i}) = x$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für die Unabhängigkeit von der Wahl der a_i sei b_i eine andere Wahl, also $\alpha(a_i)^{q^i} = x = \alpha(b_i)^{q^i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\alpha(a_i) = \alpha(b_i)$ und erneut mit 2.3 $a_i^{q^i} \equiv b_i^{q^i} \mod \pi^{i+1} R$. Die Folge $(a_i^{q^i} - b_i^{q^i})_i$ bildet demnach eine Nullfolge, sodass $\lim_{i \to \infty} a_i^{q^i} = \lim_{i \to \infty} b_i^{q^i}$. Daraus folgt auch direkt, dass s multiplikativ ist, denn sind $(a_i^{q^i})_i$ und $(b_i^{q^i})_i$ passende Folgen zu x respektive y, so bildet $(a_i^{q^i} b_i^{q^i})_i$ eine geeignete Folge für xy.

Ist $\tilde{s}: \mathcal{L} \to R$ eine weitere multiplikative Abbildung mit $\alpha \circ \tilde{s} = id_{\mathcal{L}}$, so ist für $x \in \mathcal{L}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ bereits $\alpha(s(x^{q^{-i}})) = x^{q^{-i}} = \alpha(\tilde{s}(x^{q^{-i}}))$ und damit $s(x^{q^{-i}}) \equiv \tilde{s}(x^{q^{-i}}) \mod \pi R$. Nach der erneuten Anwendung von 2.3 und der Multiplikativität von s und $\tilde{s}$ ist $s(x) = \tilde{s}(x) \mod \pi^{i+1} R$ für alle $i \in \mathbb{N}$, sodass $s(x) = \tilde{s}(x)$ gilt, da $\bigcap_i \pi^i R = 0$. □

Satz 2.31 (Eindeutigkeit der Wittvektoren)
Sei R eine π-adisch separierte und vollständige $\mathfrak{o}$-Algebra, sodass die $\mathfrak{K}$-Algebra $\mathcal{L} := R/\pi R$ perfekt ist.

i) Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren $\gamma: W(\mathcal{L})_L \to R$ mit $\gamma(x) \equiv x_0 \mod \pi R$ für alle $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in W(\mathcal{L})_L$.

ii) γ ist stetig und erfüllt

$$\gamma((x_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n s(x_n^{q^{-n}}),$$

wobei $s : \mathcal{L} \to R$ der multiplikative Schnitt von $\alpha: R \to \mathcal{L}$ aus 2.30 ist.

iii) Ist R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und gilt $\pi \cdot 1_R \in \mathfrak{m} \backslash \{0\}$, so ist γ injektiv.

iv) Ist R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal πR, so ist γ bijektiv.

Beweis: Sei wieder $\alpha: R \to R/\pi R = \mathcal{L}$ die Restklassenabbildung. Für die Existenz von γ bemerken wir zunächst, dass $W(\alpha)_L: W(R)_L \to W(\mathcal{L})_L$ ein surjektiver Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren ist. Außerdem ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ker(W(\alpha)_L)$ genau dann, wenn $b_n \in \ker \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wegen $\pi R = \ker \alpha$ und $i + q^{m-i} > i + (m-i) = m$ für $i \in \{0, \dots m\}$ ist $\Phi_m(b_0, \dots, b_m) = \sum_{i=0}^m \pi^i b_i^{q^{m-i}} \in \pi^{m+1} R$. Insbesondere erhalten wir für alle $m \in \mathbb{N}$ einen wohldefinierten Homomorphismus $\gamma_m: W(\mathcal{L})_L \to R/\pi^{m+1} R$ von $\mathfrak{o}$-Algebren, der eindeutig ist mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W(R)_L \arrow[r, "\Phi_m"] \arrow[d, "W(\alpha)_L"'] & R \arrow[r, "\alpha_{m+1}"] & R/\pi^{m+1} R \\ W(\mathcal{L}) \arrow[urr, dashed, "\gamma_m"'] & & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Nach Bemerkung 2.13 ist $\Phi_m \circ F = \Phi_{m+1}$ als Abbildungen von $W(R)_L \to R$. Bezeichnen wir mit $\alpha_{m+1,m+2}: R/\pi^{m+2} R \to R/\pi^{m+1} R$ den kanonischen Morphismus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \gamma_m \circ F \circ W(\alpha)_L &= \gamma_m \circ W(\alpha)_L \circ F \\ &= \alpha_{m+1} \circ \Phi_m \circ F \\ &= \alpha_{m+1} \circ \Phi_{m+1} \\ &= \alpha_{m+1,m+2} \circ \alpha_{m+2} \circ \Phi_{m+1} \\ &= \alpha_{m+1,m+2} \circ \gamma_{m+1} \circ W(\alpha)_L. \end{aligned}$$

Nun ist $W(\alpha)_L$ surjektiv, sodass $\gamma_m \circ F = \alpha_{m+1,m+2} \circ \gamma_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Aus dieser Gleichung erhalten wir zusammen mit der Bijektivität von F aus 2.22, da $\mathcal{L}$ perfekt ist, dass auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W(\mathcal{L})_L \arrow[r, "\gamma_{m+1}\circ F^{-(m+1)}"] \arrow[dr, "\gamma_m\circ F^{-m}"'] & R/\pi^{m+2}R \arrow[d, "\alpha_{m+1,m+2}"] \\ & R/\pi^{m+1}R \end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus der universellen Eigenschaft des projektiven Limes erhalten wir einen eindeutigen Homomorphismus $\gamma: W(\mathcal{L})_L \to \varprojlim R/\pi^{m+1}R \cong R$, sodass $\alpha_{m+1} \circ \gamma$ mit $\gamma_m \circ F^{-m}$ auf $W(\mathcal{L})_L$ übereinstimmt. Insbesondere ist $\alpha \circ \gamma \circ W(\alpha)_L = \gamma_0 \circ F^0 \circ W(\alpha)_L = \alpha \circ \Phi_0 = \Phi_0 \circ W(\alpha)_L$, wobei wir $\Phi(X) = X_0$ ausnutzen. Aus der Surjektivität von $W(\alpha)_L$ erhalten wir die gewünschte Eigenschaft, dass $\alpha \circ \gamma = \Phi_0$.

Angenommen $\tilde{\gamma}: W(\mathcal{L})_L \to R$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren mit $\alpha \circ \tilde{\gamma} = \Phi_0$. Wegen $\pi W(\mathcal{L})_L \overset{2.23}{=} \ker \Phi_0$ ist $\tilde{\gamma}(\pi W(\mathcal{L})_L) \subseteq \ker(\alpha) = \pi R$ und damit $\tilde{\gamma}(\pi^i W(\mathcal{L})_L) \subseteq \pi^i R$ für alle $i \geq 0$. Daher ist $\tilde{\gamma}$ stetig. Schreiben wir $x = (x_n)_n \in W(\mathcal{L})_L$ mit Satz 2.24 als $x = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n \tau(x_n^{q^{-n}})$, so erhalten wir aus der Stetigkeit von $\tilde{\gamma}$ die in ii) behauptete Aussage

$$\tilde{\gamma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n (\tilde{\gamma} \circ \tau)(x_n^{q^{-n}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n s(x_n^{q^{-n}}),$$

denn wegen $\alpha \circ \tilde{\gamma} = \Phi_0$ ist $\alpha \circ \tilde{\gamma} \circ \tau$ die Identität auf $\mathcal{L}$ und damit $\tilde{\gamma} \circ \tau = s$ wegen der Eindeutigkeit aus 2.30.

Für Teil iii) sei $\omega \in R$ ein Uniformisierer. Für die diskrete Bewertung v_R auf R setzen wir $v_R(\pi) = e$. Ist $m \in e \cdot \mathbb{N}$, so setzen wir $\pi_m := \pi^{\frac{m}{e}}$, also ist $v_R(\pi_m) = v_R(\omega^m) = m$. Für $x = (x_n)_n \in \ker(\gamma)$ ist dann $0 = \gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n s(x_n^{q^{-n}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{ne} s(x_n^{q^{-n}})$. Wir nutzen nun die Eindeutigkeitsaussage von [Lan05] auf Seite 488 in Kapitel XII und folgern $s(x_n^{q^{-n}}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $x_n^{q^{-n}} = \alpha(s(x_n^{q^{-n}})) = 0$ und damit $x = 0$, also ist γ injektiv. Ist π sogar selbst ein Uniformisierer, so zeigt die Aussage auf Seite 488 von [Lan05], dass γ surjektiv ist. □

Sei nun B eine $\mathfrak{K}$-Algebra. Wir wollen nun die $\mathbb{Z}_p$-Algebra der Wittvektoren $W(B) := W(B)_{\mathbb{Q}_p}$ und die $\mathfrak{o}$-Algebra der Wittvektoren $W(B)_L$ in Beziehung zueinander setzen, wenn B perfekt ist. Die $\mathfrak{K}$-Algebrastruktur $\mathfrak{K} \to B$ liefert über Funktorialität einen Homomorphismus $W(\mathfrak{K}) \to W(B)$ von $\mathbb{Z}_p$-Algebren. Wir können daher $W(B)$ als $W(\mathfrak{K})$-Algebra auffassen. Genauso finden wir wegen 2.31 einen Homomorphismus $W(\mathfrak{K}) \to \mathfrak{o}$, sodass auch $\mathfrak{o}$ eine $W(\mathfrak{K})$-Algebra wird. Wir erhalten dann die folgende Isomorphie.

Proposition 2.32
Für eine perfekte $\mathfrak{K}$-Algebra B ist $\mathfrak{o} \otimes_{W(\mathfrak{K})} W(B) \cong W(B)_L$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{o}$-Algebren. Die Abbildung $id \otimes F^f$ auf der linken Seite stimmt via diesem Isomorphismus mit dem Frobenius F auf der rechten Seite überein.

Beweis: Vergleiche Proposition 1.1.26 von [Sch17]. □

3 Der Tilt

Dieses Kapitel behandelt das Tiltingverfahren, das in dieser Formulierung auf Scholze zurückgeht (vergleiche [Scho]). Es gibt uns die Möglichkeit, für gewisse nicht-archimedisch bewertete Körper K einen neuen vollständigen Körper $K^\flat$ mit nicht-archimedischem Absolutbetrag in funktorieller Weise zu konstruieren, der Charakteristik p hat und perfekt ist. Die Grundlage dieses Kapitels ist Kapitel 1.4 von [Sch17].

Wir sind wieder in der Situation, dass $L|\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung und $\pi \in \mathfrak{o}$ ein Uniformisierer im Bewertungsring von L ist. Sei nun $L \subseteq K \subseteq \mathbb{C}_p := \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ ein Zwischenkörper.

Definition 3.1
Ein Körper K mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *perfektoid*, falls

i) K vollständig bezüglich $|\cdot|$ ist,

ii) $|K^*| \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ dicht ist,

iii) die Abbildung $(x \mapsto x^p)\colon \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ surjektiv ist.

Beispiel 3.2
$\mathbb{C}_p$ ist perfektoid, siehe vor Lemma 1.4.10 in [Sch17].

Sei nun im Folgenden zusätzlich K perfektoid und sei $\omega \in \mathfrak{m}_K$ mit $|\omega| \geq |\pi|$. Wir setzen

$$\mathfrak{o}_{K^\flat} := \varprojlim_{x \mapsto x^q} \mathfrak{o}_K/\omega\mathfrak{o}_K = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathfrak{o}_K/\omega\mathfrak{o}_K \;\middle|\; a_{n+1}^q = a_n \;\forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bemerkung 3.3
Zunächst ist $\mathfrak{o}_K/\omega\mathfrak{o}_K$ wegen $|\omega| \geq |\pi|$ eine $\mathfrak{K}$-Algebra. Da $x \mapsto x^q$ auf $\mathfrak{K}$ die Identität ist, ist $x \mapsto x^q$ auf $\mathfrak{o}_K/\omega\mathfrak{o}_K$ ein $\mathfrak{K}$-Algebrahomomorphismus. Daher ist auch $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ eine $\mathfrak{K}$-Algebra. Diese ist nach Bemerkung 1.4.4 von [Sch17] sogar perfekt.

Proposition 3.4

i) Sei $a = (a_n)_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ mit $a_n = \alpha_n + \omega\mathfrak{o}_K$ für $\alpha_n \in \mathfrak{o}_K$. Dann existiert der Limes $a^\sharp := \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{q^n}$ in $\mathfrak{o}_K$ und ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten α_n.

ii) Die Abbildung $\sharp\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_K$, $a \mapsto a^\sharp$ ist multiplikativ und erfüllt $a^\sharp + \omega\mathfrak{o}_K = a_0$.

iii) Wir definieren das multiplikative Monoid

$$\varprojlim_{x \mapsto x^q} \mathfrak{o}_K := \left\{ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{o}_K \;\middle|\; \alpha_{n+1}^q = \alpha_n \;\forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann ist die Abbildung $\varprojlim_{x\mapsto x^q} \mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_{K^\flat}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n + \omega\mathfrak{o}_K)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wohldefinierte, multiplikative Bijektion mit der Inversen

$$\mathfrak{o}_{K^\flat} \ni a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\left(a^{1/q^n} \right)^\sharp \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Beweis: Vergleiche dafür mit dem Abschnitt auf Seite 43 und insbesondere mit Lemma 1.4.5 von [Sch17]. □

Dieses Resultat zeigt insbesondere, dass wegen des kommutierenden Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{x\mapsto x^q} \mathfrak{o}_K/\omega\mathfrak{o}_K \arrow[rr, "(\alpha_n+\omega\mathfrak{o}_K)_n\mapsto(\alpha_n+\pi\mathfrak{o}_K)_n"] \arrow[dr, "\sharp"] & & \varprojlim_{x\mapsto x^q} \mathfrak{o}_K/\pi\mathfrak{o}_K \arrow[dl, "\sharp"'] \\
& \varprojlim_{x\mapsto x^q} \mathfrak{o}_K &
\end{tikzcd}$$

die $\mathfrak{K}$-Algebra $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ unabhängig von der Wahl von ω ist.

Lemma 3.5
Für einen perfektoiden Körper K ist

i) $|\cdot|_\flat \colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a \mapsto |a^\sharp|$ *ein nicht-archimedischer Absolutbetrag.*

ii) Es gilt $|\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat = |\mathfrak{o}_K|$, *aufgefasst als Teilmengen von* $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Für $a, b \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ *ist* $|a|_\flat \leq |b|_\flat$ *genau dann, wenn* $a\mathfrak{o}_{K^\flat} \subseteq b\mathfrak{o}_{K^\flat}$.

iv) Falls $\omega^\flat \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ *die Gleichung* $|\omega^\flat|_\flat = |\omega|$ *erfüllt, so ist die Abbildung* $\mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_K/\omega\mathfrak{o}_K$, $(a_n)_n \mapsto a_0$ *ein surjektiver Ringhomomorphismus mit Kern* $\omega^\flat\mathfrak{o}_{K^\flat}$. *Wir erhalten den Isomorphismus*

$$\mathfrak{o}_{K^\flat}/\omega^\flat\mathfrak{o}_{K^\flat} \cong \mathfrak{o}_K/\omega\mathfrak{o}_K.$$

Beweis: Die Aussage entspricht Lemma 1.4.6 von [Sch17]. □

Korollar 3.6
$\mathfrak{o}_{K^\flat}$ *ist ein Integritätsbereich.* $|\cdot|_\flat\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *setzt sich zu einem nicht-archimedischen Absolutbetrag* $|\cdot|_\flat \colon K^\flat \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $K^\flat := \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_{K^\flat})$ *fort. Außerdem gilt* $|K^\flat|_\flat = |K|$ *und* $\mathfrak{o}_{K^\flat} = \{x \in K^\flat \colon |x|_\flat \leq 1\}$, *wobei* $K = \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_K)$.

Beweis: Sei $ab = 0$ in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$. Dann gilt $|a|_\flat|b|_\flat = |ab|_\flat = |0|_\flat = 0$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und daher $|a|_\flat = 0$ oder $|b|_\flat = 0$. Nach Lemma 3.5i) ist $|\cdot|_\flat$ ein Absolutbetrag, woraus $a = 0$ oder $b = 0$ in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ folgt.

Die Abbildung $|\cdot|_\flat\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist multiplikativ und ungleich 0 für Elemente aus $\mathfrak{o}_{K^\flat}\backslash\{0\}$. Eine Fortsetzung auf den Quotientenkörper $K^\flat$ ist daher gegeben durch

$$\left|\frac{x}{y}\right|_\flat := \frac{|x|_\flat}{|y|_\flat} \text{ für } x, y \in \mathfrak{o}_{K^\flat} \text{ und } y \neq 0.$$

Wir erhalten mit Hilfe von Lemma 3.5ii)

$$|K^\flat|_\flat = |\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat \cdot |\mathfrak{o}_{K^\flat}\backslash\{0\}|_\flat^{-1} = |\mathfrak{o}_K| \cdot |\mathfrak{o}_K\backslash\{0\}|^{-1} = |K|.$$

Falls nun $x = \frac{y}{z} \in K^\flat$ mit $|x| \leq 1$, $y, z \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ und $z \neq 0$, so ist $|y|_\flat \leq |z|_\flat$ und damit nach Lemma 3.5iii) $y \in z\mathfrak{o}_{K^\flat}$. Insgesamt also $x = \frac{y}{z} \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Aus Proposition 3.4 folgt $|\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat = |\mathfrak{o}_K| \subseteq [0, 1]$ und damit die umgekehrte Inklusion. □

Proposition 3.7
$K^\flat$ ist ein perfekter Körper der Charakteristik p, der bezüglich $|\cdot|_\flat$ vollständig ist.

Beweis: Siehe Proposition 1.4.7 in [Sch17]. □

Definition 3.8
$\big(K^\flat, |\cdot|_\flat\big)$ heißt *Tilt* von $(K, |\cdot|)$.

Bemerkung 3.9
Sind $L \subseteq K_1, K_2 \subseteq \mathbb{C}_p$ perfektoide Zwischenkörper, so schränkt sich ein stetiger Körperhomomorphismus $\sigma\colon K_1 \to K_2$ auf die Bewertungsringe ein. Insbesondere induziert σ einen Ringhomomorphismus $\sigma^\flat\colon \mathfrak{o}_{K_1^\flat} \to \mathfrak{o}_{K_2^\flat}$ via $(\alpha_n + \pi\mathfrak{o}_{K_1})_n \mapsto (\sigma(\alpha_n) + \pi\mathfrak{o}_{K_2})_n$. Wegen

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{x \mapsto x^q} \mathfrak{o}_{K_1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathfrak{o}_{K_1^\flat} \arrow[d, "\sigma^\flat"] \\
\varprojlim_{x \mapsto x^q} \mathfrak{o}_{K_2} \arrow[r] & \mathfrak{o}_{K_2^\flat}
\end{tikzcd}$$

ist $\sigma^\flat$ injektiv und setzt sich zu einem Körperhomomorphismus $\sigma^\flat\colon K_1^\flat \to K_2^\flat$ fort. Damit ist Tilting funktoriell, denn es gilt offenbar $id_K^\flat = id_{K^\flat}$ und $(\sigma \circ \tau)^\flat = \sigma^\flat \circ \tau^\flat$.

4 Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ und $\mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$

In diesem Kapitel wollen wir die Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ und $\mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ vorstellen. Dafür definieren wir zunächst den Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L$ und stellen dann die Kategorien vor. Wir orientieren uns dabei an Kapitel 2 der Hauptquelle [ShaPor] von de Shalit und Porat. Dabei befinden wir uns wieder in der Situation, dass $L|\mathbb{Q}_p$ eine endliche Körpererweiterung, $\pi \in \mathfrak{o}$ ein Uniformisierer von L ist und dass der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von L $q = p^f$ Elemente mit $f \in \mathbb{N}$ besitzt. Wegen $\overline{L} = L^{\mathrm{sep}}$ ist die absolute Galoisgruppe gegeben durch $G := \mathrm{Gal}(\overline{L}|L)$. Die Beweise werden wir größtenteils nicht ausführen.

4.1 Der Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L$

Definition 4.1
Eine *stetige* $\mathfrak{o}$*-Darstellung von* G ist ein endlich erzeugter $\mathfrak{o}$-Modul V mit einer Abbildung $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto gv$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Für alle $g \in G$ ist die Abbildung $(v \mapsto gv): V \to V$ $\mathfrak{o}$-linear.

ii) Für alle $v \in V$ ist $1_G v = v$.

iii) Für alle $g, h \in G$ und $v \in V$ ist $g(hv) = (gh)v$.

iv) Die Abbildung $G \times V \to V$ ist stetig, wenn wir G mit der Krulltopologie, V mit der π-adischen Topologie und $G \times V$ mit der Produkttopologie versehen.

Eine $\mathfrak{o}$-lineare Abbildung $f: V_1 \to V_2$ zwischen zwei stetigen $\mathfrak{o}$-Darstellungen von G wird *G-invariant* genannt, wenn $f(gv) = gf(v)$ für alle $g \in G$ und $v \in V$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ die Kategorie der stetigen $\mathfrak{o}$-Darstellungen von G.

Sei nun $\mathcal{F}$ ein Lubin-Tate-Modul über $\mathfrak{o}$ zum Primelement π (vergleiche Definition 4.5 auf Seite 361 von [Neu92]). Wir bezeichnen nun wie in [Neu92] auf Seite 365 den Körper der π^n-ten Teilungspunkte $L_n = L(\mathcal{F}(n))$ mit $\mathcal{F}(n) = \ker([\pi^n]_{\mathcal{F}})$. Nach dem Satz 5.4 von [Neu92] ist $L_n|L$ eine rein verzweigte Erweiterung vom Grad $q^{n-1}(q-1)$. Außerdem ist jedes $\omega_n \in \mathcal{F}(n) \backslash \mathcal{F}(n-1)$ ein Primelement von L_n, also gilt insbesondere $|\omega_n| = |\pi|^{\frac{1}{q^{n-1}(q-1)}}$. Wir finden induktiv Elemente $\omega_n \in \mathcal{F}(n)$, sodass $\omega_1 \neq 0$ und $[\pi]_{\mathcal{F}}(\omega_{n+1}) = \omega_n$. Weiter setzen wir $L_\infty = \bigcup_{n \geq 1} L_n$. Nach Proposition 1.4.12 von [Sch17] ist $\widehat{L_\infty}$ perfektoid. Wegen $\omega_{n+1}^q \equiv \omega_n \mod \pi$ (vergleiche Definition 4.5 auf Seite 361 von [Neu92]) ist $\omega := (\omega_n + \pi\mathfrak{o}_{\widehat{L_\infty}})_{n \geq 0}$ ein wohldefiniertes Element von $(\widehat{L_\infty})^\flat$. Es gilt $|\omega|_\flat = \lim_{n\to\infty} |\omega_n^{q^n}| = |\pi|^{\frac{q}{q-1}} = q^{-\frac{q}{q-1}}$.

Beispiel 4.2
Ist $L = \mathbb{Q}_p$, $\pi = p$ und wählt man für $\mathcal{F}$ die multiplikative Gruppe, so ist $L_n = \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$ nach dem Beispiel auf Seite 365 von [Neu92].

Nach Korollar 5.7 von [Neu92] ist die maximal abelsche Erweiterung von L gegeben durch $L^{ab} = L^{\mathrm{nr}} \cdot L_\infty$, wobei $L^{\mathrm{nr}}|L$ die maximal unverzweigte Erweiterung ist. Wir setzen nun $K = \widehat{L^{ab}}$. Insbesondere ist K unabhängig von der Wahl des Uniformisierers.

Proposition 4.3
Der Körper K ist perfektoid.

Beweis: Wir überprüfen die drei Punkte aus Definition 3.1. Dabei ist der erste Punkt per Konstruktion von K direkt erfüllt. Da $\widehat{L_\infty}$ bereits perfektoid ist, ist insbesondere $|\widehat{L_\infty}| \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ bereits dicht. Für einen nicht-archimedischen Körper E und seiner isometrischen Vervollständigung $\widehat{E}$ ist für $\alpha \in \mathfrak{o}_E \backslash \{0\}$ das Ideal $\alpha\mathfrak{o}_E = \{x \in \mathfrak{o}_E : |x| \leq |\alpha|\}$ und wir erhalten einen Isomorphismus $\mathfrak{o}_E/\alpha\mathfrak{o}_E \cong \mathfrak{o}_{\widehat{E}}/\alpha\mathfrak{o}_{\widehat{E}}$. Nun ist $L_d\widehat{L_\infty}$ perfektoid nach Proposition 1.6.8 in [Sch17] und daher ist der Frobenius auf

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K &= \mathfrak{o}_{\widehat{L^{\mathrm{ab}}}}/p\mathfrak{o}_{\widehat{L^{\mathrm{ab}}}} \cong \mathfrak{o}_{L^{\mathrm{ab}}}/p\mathfrak{o}_{L^{\mathrm{ab}}} \\
&= \mathfrak{o}_{L^{\mathrm{nr}}L_\infty}/p\mathfrak{o}_{L^{\mathrm{nr}}L_\infty} \\
&= \mathfrak{o}_{\bigcup_{d\geq 1} L_dL_\infty}/p\mathfrak{o}_{\bigcup_{d\geq 1} L_dL_\infty} \\
&= \bigcup_{d\geq 1} \mathfrak{o}_{L_dL_\infty}/p\mathfrak{o}_{L_dL_\infty} \\
&\cong \bigcup_{d\geq 1} \mathfrak{o}_{L_d\widehat{L_\infty}}/p\mathfrak{o}_{L_d\widehat{L_\infty}}
\end{aligned}$$

surjektiv. Insgesamt ist K perfektoid. □

Bemerkung 4.4

Im klassischen zyklotomischen Fall betrachtet man den Körper $K = \widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$. Dann ist $F = K^\flat \cong \widehat{\mathbb{F}_p((t))[t^{\frac{1}{p^\infty}}]}$. Wir setzen nun $F := K^\flat$ als den Tilt von K. Nach Proposition 1.1ii) von [ShaPor] kann F mit dem Körper der formalen Potenzreihen $\sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m\omega^m$ identifiziert werden, wobei $a_m \in \overline{\mathfrak{K}}$ ist und für jede reelle Zahl M nur endlich viele $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ existieren mit $m < M$ und $a_m \neq 0$.

Wir definieren nun die $\mathfrak{o}$-Algebra

$$\tilde{\mathbb{A}}_L := W(F)_L \overset{2.32}{\cong} \mathfrak{o} \otimes_{W(\mathfrak{K})} W(F)$$

und setzen $\Gamma := \mathrm{Gal}(L^{ab}|L)$. Die Operation von Γ auf L^{ab} setzt sich wegen der Funktorialität von $(\cdot)\widehat{}$, Bemerkung 3.9 und der Funktorialität von $W(\cdot)_L$ zu einer $\mathfrak{o}$-linearen Operation auf $\tilde{\mathbb{A}}_L = W(F)_L = W((\widehat{L^{ab}})^\flat)_L$ fort. Über die Projektion $G \to G/H \cong \Gamma$ mit $H = \mathrm{Gal}(\overline{L}|L^{ab})$ erhalten wir auch eine $\mathfrak{o}$-lineare G-Operation auf $\tilde{\mathbb{A}}_L$. Außerdem setzt sich der Frobenius $x \mapsto x^q$ auf F via $\varphi = W(x \mapsto x^q)_L$ zu einem $\mathfrak{o}$-linearen Automorphismus auf $W(F)_L$ fort (vergleiche Satz 2.11). Da die Γ-Operation auf F mit $x \mapsto x^q$ kommutiert, kommutiert die Γ-Operation mit dem Frobenius auf $\tilde{\mathbb{A}}_L$.

Der Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ist nach Satz 2.24 ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer π und Restklassenkörper F. Außerdem werden wir für die Elemente von $\tilde{\mathbb{A}}_L$ eine explizite Darstellung durch Potenzreihen angeben. Diese werden wir benutzen, um den Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ zu beschreiben. Sei dafür $v_p(\cdot) = \frac{\log|\cdot|}{\log|p|} = \log_{|p|}(\cdot)$ die p-adische Bewertung auf $\mathbb{C}_p^* = (\widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}})^*$ mit $v_p(p) = 1$. Der Restklassenkörper der Vervollständigung des diskreten Bewertungsrings von L^{nr} ist $\overline{\mathfrak{K}}$ und ist daher nach 2.27 isomorph zu $W_L := W(\overline{\mathfrak{K}})_L = \mathfrak{o} \otimes_{W(\mathfrak{K})} W(\overline{\mathfrak{K}})$. Bezeichne A die Menge der Potenzreihen $\sum a_mX^m$, wobei $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}], a_m \in W_L$ ist und für jede reelle Zahl M nur endlich viele m mit $m < M$ und $v_p(a_m) < M$ existieren.

Proposition 4.5

A wird via $\sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_mX^m + \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} b_mX^m := \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]}(a_m + b_m)X^m$ und $\sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_mX^m \cdot \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} b_mX^m := \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]}(\sum_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_kb_{m-k})X^m$ zu einer $\mathfrak{o}$-Algebra.

Beweis: Zunächst wollen wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_k b_{m-k}$ in dem vollständigen Ring W_L für festes $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ konvergiert. Das bedeutet in dieser Situation, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ nur endlich viele Summanden $c_k = a_k b_{m-k}$ gibt mit $|c_k| \geq \epsilon$ beziehungsweise dass es zu jedem $C > 0$ nur endlich viele Summanden c_k gibt mit $v_p(c_k) \leq C$.

Für $C > \frac{m}{2}$ ist $k < C$ oder $m - k \leq m - C < C$. Aufgrund der Voraussetzungen an die Koeffizienten finden wir nur endlich viele $k < C$ mit $v_p(a_k) < C$ und nur endlich viele $k \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ mit $m - k < C$ und $v_p(b_{m-k}) < C$. Da in der Vervollständigung W_L des Bewertungsrings von L^{nr} alle Elemente nicht-negative Bewertung haben, existieren nur endlich viele $k \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ mit $v_p(a_k b_{m-k}) = v_p(a_k) + v_p(b_{m-k}) < C$. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_k b_{m-k}$ im vollständigen Ring W_L.

Sei nun $M \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung existieren nur endlich viele $m < M$ mit $v_p(a_m) < M$ oder $v_p(b_m) < M$. Ist $m < M$ mit $v_p(a_m) \geq M$ und $v_p(b_m) \geq M$, dann erhalten wir $v_p(a_m + b_m) \geq \min\{v_p(a_m), v_p(b_m)\} \geq M$, und damit ist die oben definierte Addition wohldefiniert. Für die Wohldefiniertheit der Multiplikation müssen wir zeigen, dass $v_p(\sum_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_k b_{m-k}) < M$ nur für endlich viele $m < M$ gilt. Angenommen, wir haben eine Familie von Elementen $(m_i)_{i\in I}$ mit $m_i < M$ und für alle $i \in I$ ist $v_p(\sum_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_k b_{m_i-k}) < M$ und damit auch $M > v_p(\sum_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_k b_{m_i-k}) \geq \inf_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]}\{v_p(a_k) + v_p(b_{m_i-k})\}$. Dann existiert zu jedem $m_i < M$ ein $k_i \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ mit $v_p(a_{k_i}) < M$ und $v_p(b_{m_i-k_i}) < M$ für alle $i \in I$. Da es nur endlich viele $k > 0$ mit $v_p(b_{M-k}) < M$ gibt, setzen wir $C_1 = \sup\{k : v_p(b_{M-k}) < M\}$. Wir erhalten wegen $v_p(b_{M-(M-(m_i-k_i))}) = v_p(b_{m_i-k_i}) < M$ die Ungleichung $M - (m_i - k_i) \leq C_1$, also $k_i \leq C_1 - (M - m_i) < C_1$ für alle $i \in I$. Setzen wir $M_1 = \max\{M, C_1\} \in \mathbb{R}$, so ist $k_i < M_1$ und $v_p(a_{k_i}) < M_1$ für alle $i \in I$, insbesondere sind nach Voraussetzung an $(a_k)_k$ nur endlich viele k_i verschieden. Wir setzen $C_2 = \min_{i\in I}\{k_i\}$ und $M_2 = \max\{M, M - C_2\}$. Dann ist $m_i - k_i < M - C_2 \leq M_2$ und $v_p(b_{m_i-k_i}) < M_2$ für alle $i \in I$. Also sind wegen der Voraussetzung an $(b_k)_k$ auch nur endlich viele $m_i - k_i$ verschieden und daher nur endlich viele m_i verschieden. Damit ist auch die angegebene Multiplikation wohldefiniert auf A. □

Proposition 4.6
Die $\mathfrak{o}$-Algebra $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ist isomorph zu dem Ring der Potenzreihen $\sum a_m X^m$, wobei $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}], a_m \in W_L$ und für jede reelle Zahl M existieren nur endlich viele m mit $m < M$ und $v_p(a_m) < M$. Modulo π wird X^m auf ω^m abgebildet.

Beweis: Vergleiche Proposition 1.4i) von [ShaPor]. Es ist zu zeigen, dass A ein π-adisch vollständiger diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper F und Uniformisierer π ist, wobei X modulo π auf ω abgebildet wird. Die Aussage folgt dann aus Satz 2.31. Wir bemerken, dass die Konstruktion des Schnitts $s: F \to A$ für das Element $\omega \in F$ wegen $X \mod \pi = \omega$ im Beweis von 2.30 $s(\omega) = X$ liefert, und damit auch $s(\omega^m) = X^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ und aus der expliziten Beschreibung von γ erhalten wir $\gamma(\tau(\omega^m)) = X^m$.

Bezeichne $pr: W_L = W(\overline{\mathfrak{K}})_L \to \overline{\mathfrak{K}}$ die kanonische Projektion, so ist die Abbildung $A \to F$, $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m X^m \mapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} pr(a_m)\omega^m$, wohldefiniert. Ein Urbild eines Elementes $\sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} b_m \omega^m$ mit $b_m \in \overline{\mathfrak{K}}$ ist gegeben durch $\sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \tau(b_m) X^m$. Der Kern der Abbildung ist gerade πA, sodass wir $A/\pi A \cong F$ erhalten.

Außerdem ist A π-adisch separiert, da für ein $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m X^m \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi^n A$ bereits $a_m \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi^n W_L$ für alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ gilt. Weil W_L selbst π-adisch separiert ist, folgt $f = 0$.

Als Nächstes zeigen wir, dass A π-adisch vollständig ist. Sei dafür $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A mit $f^{(n)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m^{(n)} X^m$. Insbesondere bildet für jedes $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ die Folge $(a_m^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ selbst eine Cauchyfolge im π-adisch vollständigen Ring W_L. Wir setzen $a_m = \lim_{n\to\infty} a_m^{(n)}$ und $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m X^m$. Es bleibt zu zeigen, dass f der Grenzwert in A ist. Dafür sei $M \in \mathbb{R}$. Wir finden $C \geq 0$ mit $v_p(\pi^C) \geq M$. Sei nun $N \geq 0$ mit $f^{(n)} - f^{(k)} \in \pi^C A$ für alle $n, k \geq N$. Dann ist auch $a_m^{(n)} - a_m^{(k)} \in \pi^C W_L$ für alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ und alle $n, k \geq N$. Ist nun $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$, so existiert $N_m \geq N$, sodass $v_p(a_m - a_m^{(k)}) \geq M$ für alle $k \geq N_m$, also $a_m - a_m^{(k)} \in \pi^C W_L$. Insbesondere ist

$$v_p(a_m - a_m^{(n)}) = v_p((a_m - a_m^{(k)}) + (a_m^{(k)} - a_m^{(n)})) \geq M$$

für alle $n \geq N$ und alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ und damit nach der starken Dreiecksungleichung auch $v_p(a_m) = v_p(a_m^{(n)}) < M$, falls $v_p(a_m) < M$. Zu festem $n \geq N$ existieren aber nur endlich viele solcher $m < M$, daher ist $f \in A$. Aus der Rechnung geht ebenfalls hervor, dass f ein π-adischer Grenzwert der Cauchyfolge $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aus der Vollständigkeit können wir über ein geometrisches Reihenargument zeigen, dass A lokal ist. Ist nämlich $f \in A \backslash \pi A$, so ist die Reduktion modulo π in F eine Einheit. Sei $g \in A$ ein Lift der Inversen von $f \mod \pi$, also $f \cdot g \equiv 1 \mod \pi$. Dann ist $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1 - fg)^n$ ein Inverses von $fg = 1 - (1 - fg)$ in A, sodass auch f invertierbar in A ist. Daher ist πA das einzige maximale Ideal von A.

Um zu zeigen, dass A nullteilerfrei ist, zeigen wir zunächst, dass es zu $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m X^m \in A$ ein minimales $j \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ gibt mit $|a_j| = \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} |a_m|$. Ist $f \neq 0$, so setzen wir $C = \inf\{v_p(a_m)\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wegen $v_p(W_L) = v_p(\pi)\mathbb{Z}$ wird eine Folge $(v_p(m_k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} v_p(m_k) = \inf_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]}\{v_p(a_m)\}$ stationär, sodass wir $j \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ finden mit $v_p(a_j) = \inf_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]}\{v_p(a_m)\}$ und damit auch $|a_j| = \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} |a_m|$. Setzen wir $M = \max\{C, j\} + 1$, so existieren nur endlich viele $m < M$ mit $v_p(a_m) < M$, insbesondere können wir $j \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ minimal mit der Eigenschaft $v_p(a_j) = C$ wählen. Ist nun $g = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} b_m X^m \in A\backslash\{0\}$ und $l \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ minimal mit $|b_l| = \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} |b_m|$, so ist auch der Betrag des Koeffizienten vor X^{j+l} von fg nach der starken Dreiecksungleichung gleich $|a_j| \cdot |b_l| \neq 0$ und damit ist $fg \neq 0$.

Wir beenden den Beweis mit Hilfe von Bemerkung 1.1.20 von [Sch17], nach der A ein Hauptidealring ist. □

4.2 Schwache Topologie

Für diese Arbeit ist die schwache Topologie wesentlich. Unter anderem werden wir fordern, dass die Γ-Operation auf den (φ, Γ)-Moduln bezüglich dieser stetig ist. Wir werden ein fundamentales System offener Umgebungen von 0 angeben, wollen aber zunächst die Definition kurz motivieren. Dabei orientieren wir uns insbesondere an [Sch17] Kapitel 1.5. Statten wir F mit der Normtopologie aus, so nennen wir die Produkttopologie auf $W(F)_L$ die schwache Topologie (vergleiche mit dem Abschnitt auf Seite 66 von [Sch17]). Diese ist nach Lemma 1.5.5 von [Sch17] separiert und vollständig. Weiter finden wir in unserer speziellen Situation nach Bemerkung 2.1.5 von [Sch17] das folgende fundamentale System offener Umgebungen.

Bemerkung 4.7
Für jedes $\alpha \in W(\mathfrak{o}_F)_L$ mit $0 < |\Phi_0(\alpha)|_\flat < 1$ bilden die $W(\mathfrak{o}_F)_L$-Untermoduln $\alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^m W(F)_L$ mit $m \geq 1$ ein fundamentales System offener Umgebungen um 0 bezüglich der schwachen Topologie auf $W(F)_L$.

Bemerkung 4.8
Nach Lemma 1.5.4 von [Sch17] ist $\tilde{\mathbb{A}}_L$, ausgestattet mit der schwachen Topologie, ein topologischer Ring. Die Abbildungen φ und φ^{-1} sowie die Γ-Operation auf $\tilde{\mathbb{A}}_L$ sind stetig bezüglich der schwachen Topologie. Letzteres bedeutet, dass die Abbildung $\Gamma \times \tilde{\mathbb{A}}_L \to \tilde{\mathbb{A}}_L$ bezüglich der Produkttopologie links stetig ist.

Beweis: Da φ und φ^{-1} auf F bezüglich der Normtopologie stetig sind und auf $W(F)_L$ via $W(\varphi)_L$ und $W(\varphi^{-1})_L$ abbilden, sind sie auch stetig bezüglich der schwachen Topologie. Für die Stetigkeit der Γ-Operation orientieren wir uns an Lemma 1.5.3 von [Sch17]. Ist $O \subseteq W(F)_L$ offen und $(\sigma, b) \in \Gamma \times W(F)_L$ mit $\sigma(b) \in O$, so finden wir eine offene Umgebung

$$U_{\mathfrak{a},m} = \{(a_0, \ldots, a_n, \ldots) \in W(F)_L : \ a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathfrak{a}\}$$

mit $\sigma(b) + U_{a,\mathfrak{m}} \subseteq O$ (vergleiche Seite 66 von [Sch17]) für ein offenes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}_F$. Dabei beachten wir, dass die von 0 verschiedenen Ideale von $\mathfrak{o}_F$ eine Basis offener Umgebungen für 0 bilden, denn zum einen bilden für $0 < \epsilon < 1$ die Kreise $\{z \in F : |z|_\flat < \epsilon\} \subseteq \mathfrak{o}_F$ von 0 verschiedene Ideale und zum anderen ist für $0 \neq a \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}_F$ bereits $\{z \in F : |z|_\flat < |a|_\flat\} \subseteq \mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a}$ ein von Null verschiedenes Ideal ist. Da $\Gamma \times F^m \to F^m$ stetig ist, finden wir eine offene Untergruppe $U \subseteq \Gamma$ und ein offenes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{o}_F$, sodass $\sigma U(b_i + \mathfrak{b}) \subseteq \sigma(b_i) + \mathfrak{a}$ für alle $0 \leq i \leq m-1$. Nun ist

$$\begin{aligned}\sigma U(b + U_{\mathfrak{b},m}) &= \sigma U\big((b_0 + \mathfrak{b}, \ldots b_{m-1} + \mathfrak{b}, 0, 0, \ldots) + \pi^m W(F)_L\big) \\ &\subseteq (\sigma(b_0) + \mathfrak{a}, \ldots, \sigma(b_{m-1}) + \mathfrak{a}, 0, \ldots) + \pi^m W(F)_L \\ &= \sigma(b) + U_{\mathfrak{a},m},\end{aligned}$$

also ist die Γ-Operation stetig. □

Wir können nun die schwache Topologie auf $\tilde{\mathbb{A}}_L$ nutzen, um eine Topologie auf endlich erzeugten $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Moduln zu induzieren. Dafür nutzen wir die Quotiententopologie.

Definition 4.9
Sei X ein topologischer Raum und $q: X \to Y$ eine Surjektion von Mengen. Eine Menge $U \subseteq Y$ ist genau dann offen bezüglich der Quotiententopologie, wenn $q^{-1}(U)$ offen in X ist.

Es ist einfach zu zeigen, dass dies eine Topologie auf Y definiert. Es ist die feinste Topologie auf Y bezüglich der q stetig ist. Man zeigt leicht die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie, dass eine Abbildung $f: Y \to Z$ für einen topologischen Raum Z genau dann stetig ist, wenn die Verkettung $f \circ q$ stetig ist.

Für einen endlich erzeugten $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul wählen wir nun $d \in \mathbb{N}$ und eine $\tilde{\mathbb{A}}_L$-lineare Surjektion $\tilde{\mathbb{A}}_L^d \to M$ und nennen die durch die Quotiententopologie definierte Topologie die *schwache Topologie* auf M, wobei wir $\tilde{\mathbb{A}}_L$ mit der schwachen Topologie und $\tilde{\mathbb{A}}_L^d$ mit der Produkttopologie ausstatten.

Bemerkung 4.10
Für die schwache Topologie gelten die folgenden Eigenschaften:

i) Die Topologie auf M ist unabhängig von der Wahl von d und der Wahl der Surjektion.

ii) Jede $\tilde{\mathbb{A}}_L$-lineare Abbildung f zwischen endlich erzeugten Moduln über $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ist stetig.

iii) Jeder endlich erzeugte $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul ist ein topologischer Modul bezüglich der schwachen Topologie.

iv) Ist $\mu\colon \tilde{\mathbb{A}}_L \to \tilde{\mathbb{A}}_L$ ein stetiger Ringhomomorphismus und $\alpha\colon M \to N$ ein μ-semilinearer Homomorphismus zwischen endlich erzeugten $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Moduln, so ist α bereits stetig.

Beweis: Wir beweisen zunächst Teil ii). Sei $f\colon M \to N$ $\tilde{\mathbb{A}}_L$-linear und seien $\tilde{\mathbb{A}}_L^d \to M, \tilde{\mathbb{A}}_L^e \to N$ $\tilde{\mathbb{A}}_L$-lineare Surjektionen. Wegen der Projektivität von $\tilde{\mathbb{A}}_L^d$ existiert eine $\tilde{\mathbb{A}}_L$-lineare Abbildung $\tilde{f}\colon \tilde{\mathbb{A}}_L^d \to \tilde{\mathbb{A}}_L^e$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbb{A}}_L^d \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & \tilde{\mathbb{A}}_L^e \arrow[d] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie genügt es, die Stetigkeit von $\tilde{f}$ zu zeigen. $\tilde{f}$ ist aber gegeben durch Matrixmultiplikation und ist daher stetig, denn $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ist ein topologischer Ring. Wir folgern Teil i) durch die Wahl $M = N$ und $f = id_M$.

Für iii) wählen wir uns eine Surjektion $\chi_M\colon \tilde{\mathbb{A}}_L^d \to M$ und erhalten für die Addition das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbb{A}}_L^d \times \tilde{\mathbb{A}}_L^d \arrow[r, "+_{\tilde{\mathbb{A}}_L^d}"] \arrow[d, two heads, "\chi_M \times \chi_M"] & \tilde{\mathbb{A}}_L^d \arrow[d, two heads, "\chi_M"] \\
M \times M \arrow[r, "+_M"] & M.
\end{tikzcd}$$

Nun ist für eine offene Menge $U \subseteq M$ das Urbild $+_M^{-1}(U)$ genau dann offen, wenn $+_{\tilde{\mathbb{A}}_L^d}^{-1}(\chi_M^{-1}(M))$ offen ist. Da $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ein topologischer Ring ist, ist dies der Fall. Analog ist auch $\tilde{\mathbb{A}}_L \times M \to M$ stetig.

Für iv) sei $\chi_M\colon \tilde{\mathbb{A}}_L^m \to M$ eine $\tilde{\mathbb{A}}_L$-lineare Surjektion. Wir fassen $\tilde{\mathbb{A}}_L$ via (id, μ) als $(\tilde{\mathbb{A}}_L, \tilde{\mathbb{A}}_L)$-Bimodul auf und schreiben dafür $\tilde{\mathbb{A}}_{L,\mu}$. Wir erhalten den endlich erzeugten $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul $\tilde{\mathbb{A}}_{L,\mu} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} \tilde{\mathbb{A}}_L^m \cong \tilde{\mathbb{A}}_L^m$. Nun ist $\mu^m\colon \tilde{\mathbb{A}}_L^m \to \tilde{\mathbb{A}}_L^m$ nach Voraussetzung stetig. Weiter sind die $\tilde{\mathbb{A}}_L$-linearen Abbildungen $id \otimes \chi_M\colon \tilde{\mathbb{A}}_{L,\mu} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} \tilde{\mathbb{A}}_L^m \to \tilde{\mathbb{A}}_{L,\mu} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M$ und $\alpha^{\mathrm{lin}}\colon \tilde{\mathbb{A}}_{L,\mu} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M \to N$ mit $a \otimes m \mapsto a\alpha(m)$ stetig, also insbesondere auch deren Verkettung. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbb{A}}_L^m \arrow[r, "\mu^m"] \arrow[d, two heads, "\chi_M"] & \tilde{\mathbb{A}}_{L,\mu}^m = \tilde{\mathbb{A}}_{L,\mu} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} \tilde{\mathbb{A}}_L^m \arrow[d, "\text{stetig}"] \\
M \arrow[r, "\alpha"] & N
\end{tikzcd}$$

und mit der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie folgt die Behauptung. $\square$

4.3 (φ, Γ)-Moduln und die Kategorienäquivalenz

Definition 4.11

i) Ein *φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}_L$* ist ein endlich erzeugter $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul M mit einem φ-semilinearen Endomorphismus $\varphi_M\colon M \to M$.

ii) Ein *(φ, Γ)-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}_L$* ist ein φ-Modul M über $\tilde{\mathbb{A}}_L$ mit einer mit φ_M kommutierenden stetigen Γ-semilinearen Operation $\Gamma \times M \to M$, wobei wir Γ mit der Krulltopologie und M mit der schwachen Topologie ausstatten.

iii) Ein *Homomorphismus von φ-Moduln über $\tilde{\mathbb{A}}_L$* ist ein Homomorphismus von $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Moduln $\alpha\colon M \to N$ mit $\alpha \circ \varphi_M = \varphi_N \circ \alpha$.

iv) Ein *Homomorphismus von (φ, Γ)-Moduln über $\tilde{\mathbb{A}}_L$* ist ein Homomorphismus von φ-Moduln α über $\tilde{\mathbb{A}}_L$, der mit der Γ-Operation kommutiert.

v) Ein φ-Modul oder ein (φ, Γ)-Modul heißt *étale*, wenn φ_M bijektiv ist.

Bemerkung 4.12

i) Die Stetigkeit von α und φ_M ist bereits nach Bemerkung 4.10 gegeben, da α $\tilde{\mathbb{A}}_L$-linear und φ auf $\tilde{\mathbb{A}}_L$ stetig ist.

ii) Da φ bijektiv ist, ist auch $\varphi \otimes id$ bijektiv, sodass aus dem kommutierenden Diagramm

$$\begin{tikzcd} M = \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M \arrow[d, "\varphi\otimes id_M", "\cong"'] \arrow[dr, "\varphi_M"] & \\ \tilde{\mathbb{A}}_{L,\varphi} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M \arrow[r, "\varphi_M^{\mathrm{lin}}"] & M \end{tikzcd}$$

folgt, dass die $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Linearisierung $\varphi_M^{\mathrm{lin}}\colon \tilde{\mathbb{A}}_{L,\varphi} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M \to M$ genau dann bijektiv ist, wenn φ_M bijektiv ist. Falls φ nicht bijektiv ist, wird die Bijektivität von φ_M^{lin} als Definition von *étale* verwendet.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L) \subseteq \mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ die Kategorie der (étalen) (φ, Γ)-Moduln über $\tilde{\mathbb{A}}_L$. Das erste Ziel ist es, die Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ und $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ vorzustellen. Dafür setzen wir zunächst

$$\tilde{\mathbb{A}} := W(F^{\mathrm{sep}})_L \overset{2.32}{\cong} \mathfrak{o} \otimes_{W(\mathfrak{K})} W(F^{\mathrm{sep}}).$$

Wie bereits bei $\tilde{\mathbb{A}}_L$ setzt sich der Frobeniusautomorphismus $\mathfrak{o}$-linear via $\varphi = W(x \mapsto x^q)_L$ auf $\tilde{\mathbb{A}}$ fort. Weiter operiert die Gruppe G über den Quotienten $\Gamma = \mathrm{Gal}(L^{ab}|L) \cong G/H$ auf L^{ab} und wie zuvor auf $(\widehat{L^{ab}})^\flat = F$. Außerdem operiert G auf $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$, also auf $\mathbb{C}_p^\flat$. Da dies ein algebraisch abgeschlossener Körper ist (vergleiche Lemma 1.4.10 von [Sch17]), ist $F^{sep} \subseteq \mathbb{C}_p^\flat$ und es ist schnell zu sehen, dass sich die Operation von $\mathbb{C}_p^\flat$ auf F^{sep} einschränkt. Es gilt sogar $\mathrm{Gal}(F^{sep}|F) \cong H$ nach Proposition 1.2i) von [ShaPor]. Da die Operation von G durch $W(\sigma)_L$ gegeben ist und da $(F^{sep})^H = F$ ist, gilt $\tilde{\mathbb{A}}^H = \tilde{\mathbb{A}}_L$ für $H = \mathrm{Gal}(\overline{L}|L^{ab})$. Genauso folgt $\tilde{\mathbb{A}}^{\varphi=1} := \{x \in \tilde{\mathbb{A}} \mid \varphi(x) = x\} = \mathfrak{o}$ wegen $(F^{sep})^{\varphi=1} = \mathfrak{K}$ und wegen $W(\mathfrak{K})_L = \mathfrak{o}$.

Sei also nun $V \in \mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$. Wir betrachten zunächst den $\tilde{\mathbb{A}}$-Modul $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V$. Für $\sigma \in G$ ist $\sigma \times \sigma : \tilde{\mathbb{A}} \times V \to \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V$ eine $\mathfrak{o}$-balancierte Abbildung. Wir erhalten die diagonale Operation auf $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V$. Setzen wir nun $\mathbb{D}(V) = (\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H$, so ist wegen obiger Gleichung $\mathbb{D}(V)$ ein $\tilde{\mathbb{A}}^H = \tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul. Außerdem erhalten wir wegen $G/H \cong \Gamma$ eine Γ-semilineare Operation auf $\mathbb{D}(V)$. Da φ und die Operation von G auf $\tilde{\mathbb{A}}$ kommutieren (G und φ kommutieren auf F^{sep}), kommutiert auch $\varphi \otimes id$ mit der Operation von G auf $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V$, sodass $\varphi \otimes id$ einen φ-semilinearen Endomorphismus $\varphi_{\mathbb{D}(V)}$ induziert.

Lemma 4.13
Es gilt $\mathbb{D}(V) \in \mathrm{Mod}^{\acute{e}t}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$.

Beweis: Vergleiche Lemma 2.1 von [ShaPor]. Aus dem Beweis geht insbesondere hervor, dass die kanonische Abbildung $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} \mathbb{D}(V) \to \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V$ ein G-invarianter Isomorphismus von φ-Moduln über $\tilde{\mathbb{A}}$ ist. Die Beweisstrategie ist dieselbe wie im von Fontaine behandelten zyklotomischen Fall (vergleiche Proposition 1.2.4 [Fon]): Man behandelt zuerst den Fall $\pi V = 0$ mit Hilfe von Hilberts Satz 90, verwendet *dévissage* für den π-Torsionsfall und abschließend ein Mittag-Leffler-Argument für den Übergang zum inversen Limes $V = \varprojlim_n V/\pi^n V$. □

Für die Konstruktion des Funktors in die andere Richtung sei $M \in \mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$. Wegen der φ-Semilinearität von φ_M ist die Abbildung $\tilde{\mathbb{A}} \times M \to \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M$, $(a,m) \mapsto \varphi(a) \otimes \varphi_M(m)$, $\tilde{\mathbb{A}}_L$-balanciert. Wir erhalten eine φ-semilineare Abbildung $\varphi = \varphi \otimes \varphi_M$ auf $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M$, die wir erneut mit φ bezeichnen. Wir setzen $\mathbb{V}(M) := (\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M)^{\varphi=1} := \{\delta \in \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M : \varphi(\delta) = \delta\}$. Wegen $\tilde{\mathbb{A}}^{\varphi=1} = \mathfrak{o}$ ist $\mathbb{V}(M)$ ein $\mathfrak{o}$-Modul. Die G-Operation auf $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M$ via $\sigma \otimes id_M$ kommutiert mit $\varphi \otimes \varphi_M$, daher erhalten wir auch auf $\mathbb{V}(M)$ eine G-Operation.

Lemma 4.14
Es gilt $\mathbb{V}(M) \in \mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$.

Beweis: Vergleiche Lemma 2.2. von [ShaPor]. Aus dem Beweis geht insbesondere hervor, dass der kanonische Homomorphismus $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathbb{V}(M) \to \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M$ ein G-invarianter Isomorphismus von φ-Moduln über $\tilde{\mathbb{A}}$ ist. Man folgt wiederum der ursprünglichen Strategie von Fontaine. □

Satz 4.15
Die Funktoren $\mathbb{D} : \mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G) \to \mathrm{Mod}^{\acute{e}t}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ *und* $\mathbb{V} : \mathrm{Mod}^{\acute{e}t}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L) \to \mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ *sind quasi-inverse Äquivalenzen von Kategorien.*

Beweis: Vergleiche Theorem 2.3 in [ShaPor]. □

Bemerkung 4.16
Aus dem Beweis ergibt sich, dass V (bzw. M) genau dann ein π-Torsionsmodul ist, wenn $\mathbb{D}(V)$ (bzw. $\mathbb{V}(M)$) ein π-Torsionsmodul ist.

Wir erinnern uns daran, dass es das Ziel dieser Arbeit ist, diese Kategorierenäquivalenz durch eine Äquivalenz zwischen $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ und $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger})$ zu erweitern. Dies ist das Resultat des nachfolgenden Kapitels.

5 Der Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ und Überkonvergenz

In diesem Kapitel werden wir damit beginnen, den Ring der überkonvergenten Elemente $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ einzuführen. Dieser wird weiterhin ein diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer π und Restklassenkörper F sein. Außerdem wird sich zeigen, dass sich die Operationen von Γ und G sowie der Frobenius φ auf $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ einschränken lassen. Wir können analog die Kategorie der überkonvergenten étalen (φ, Γ)-Moduln einführen und beenden das Kapitel mit der Kategorienäquivalenz zwischen $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ und $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$. Grundlage hierfür bildet Kapitel 4 von [ShaPor].

5.1 Der Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$

Zur Konstruktion des Rings $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ führen wir eine Verallgemeinerung der Gauß Norm ein, vergleiche auch mit Abschnitt 1.7 von [Ked].

Definition 5.1
Sei $x = \sum_{n=0}^\infty \pi^n \tau(x_n) \in \tilde{\mathbb{A}}_L = W(F)_L$ mit $x_n \in F$ (vergleiche 2.24). Für $0 \le r < \infty$ setzen wir $|x|_r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{q^{-n}|x_n|_\flat^r\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und für $r = \infty$ sei $|x|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|_\flat\} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

Bemerkung 5.2
Analog definieren wir $|\cdot|_r$ für $x = \sum_{n=0}^\infty \pi^n\tau(x_n) \in \tilde{\mathbb{A}} = W(F^{sep})_L$ mit $x_n \in F^{sep}$. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

i) Für $r = 0$ gilt für $\xi \neq 0$ in F bzw. in F^{sep} schon $|\xi|_\flat^r = 1$ und $|0|_\flat^r = 0$, also ist $|x|_0 < \infty$ endlich für alle $x \in \tilde{\mathbb{A}}_L$ und alle $x \in \tilde{\mathbb{A}}$.

ii) Für $0 \le s \le r < \infty$ erhalten wir

$$|x|_s = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{q^{-n}|x_n|_\flat^s\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{q^{-n}|x_n|_\flat^{r\frac{s}{r}}\} \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\{q^{-n\frac{s}{r}}|x_n|_\flat^{r\frac{s}{r}}\} \le |x|_r^{\frac{s}{r}}.$$

iii) Außerdem ist für $0 \le r < \infty$

$$|x|_r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{q^{-n}|x_n|_\flat^r\} \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|_\flat^r\} = (\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|_\flat\})^r = |x|_\infty^r.$$

iv) Falls $x \in W(\mathfrak{o}_F)_L$ ist, so ist $|x|_r < \infty$ für alle $0 \le r \le \infty$. Dafür genügt es nach iii), für $x = \sum_{n=0}^\infty \pi^n\tau(x_n)$ mit $x_n \in \mathfrak{o}_F$ zu zeigen, dass $\sup(|x_n|_\flat) < \infty$ ist. Dies ist aber der Fall, da $|x_n|_\flat \le 1$. Beachte auch, dass $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{o}_F$ und daher $|x|_r < \infty$ für alle $x \in W(\mathfrak{K})_L$ und alle $0 \le r \le \infty$.

v) Analog gilt $|x|_r < \infty$ für alle $x \in W(\mathfrak{o}_{F^{sep}})_L$ und alle $0 \le r \le \infty$.

Wir wollen im Folgenden darauf hinarbeiten, dass für $r > 0$ die Menge $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)} := \{x \in \tilde{\mathbb{A}}_L : |x|_r < \infty\}$ einen Unterring von $\tilde{\mathbb{A}}_L$ liefert, auf dem $|\cdot|_r$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag ist.

Lemma 5.3
Für $k \ge 0$ und $x = \sum_{n=0}^\infty \pi^n\tau(x_n) \in W(\mathfrak{o}_F)_L$ setzen wir

$$N_k(x) = \sup_{0\le n\le k} |x_n|_\flat \in |\mathfrak{o}_F|_\flat \subseteq [0,1].$$

Dann gilt:

i) Für $a \in \mathfrak{o}_F$ gilt $N_k(x) \le |a|_\flat$ dann und nur dann, wenn $x \in \tau(a)W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^{k+1}W(\mathfrak{o}_F)_L$.

ii) $N_k(x+y) \le \max\{N_k(x), N_k(y)\}$ für $y \in W(\mathfrak{o}_F)_L$.

iii) $N_k(xy) \le \sup_{i+j=k}\{N_i(x)N_j(y)\}$ für $y \in W(\mathfrak{o}_F)_L$.

iv) $|x|_r = \sup_{k\ge 0}\{q^{-k}N_k(x)^r\}$ für $0 \le r < \infty$.

Beweis: Wir orientieren uns an Lemme 1.4.2 von [FarFon]. Für die erste Aussage stellen wir fest, dass $N_k(x) \le |a|_\flat$ genau dann gilt, wenn für alle $0 \le n \le k$ auch $|x_n|_\flat \le |a|_\flat$, also nach Lemma 3.5 $x_n \in a\mathfrak{o}_F$ ist. Da τ multiplikativ ist, finden wir $x \in \tau(a)W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^{k+1}W(\mathfrak{o}_F)_L$.

Sei nun ohne Einschränkung $\max\{N_k(x), N_k(y)\} = N_k(x)$. Wir finden $a \in \mathfrak{o}_F$ mit $|a|_\flat = N_k(x) \ge N_k(y)$. Insbesondere ist $x, y \in \tau(a)W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^{k+1}W(\mathfrak{o}_F)_L$ und damit auch $x+y$. Aus i) folgt dann $N_k(x+y) \le |a|_\flat = \max\{N_k(x), N_k(y)\}$.

Für die dritte Aussage stellen wir fest, dass $xy = \sum_{i+j\le k}\tau(x_iy_j)\pi^{i+j} \mod \pi^{k+1}W(\mathfrak{o}_F)_L$. Ist nun $a \in \mathfrak{o}_F$ mit

$$|a|_\flat = \max_{i+j\le k}|x_i|_\flat|y_j|_\flat = \max_{i+j=k}\{\max_{n\le i}|x_n|_\flat \cdot \max_{m\le j}|y_m|_\flat\} = \sup_{i+j=k}\{N_i(x)N_j(y)\},$$

so erhalten wir $xy \in \tau(a)W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^{k+1}W(\mathfrak{o}_F)_L$, also $N_k(xy) \le |a|_\flat = \sup_{i+j=k}\{N_i(x)N_j(y)\}$.

Zuletzt stellen wir

$$|x|_r = \sup_{n\ge 0}\{q^{-n}|x_n|_\flat^r\} = \sup_{n\ge 0}\sup_{k\ge n}\{q^{-k}|x_n|_\flat^r\} = \sup_{k\ge 0}\sup_{0\le n\le k}\{q^{-k}|x_n|_\flat^r\} = \sup_{k\ge 0}\{q^{-k}N_k(x)^r\}$$

fest und beenden damit den Beweis des Lemmas. □

Lemma 5.4
Für $0 \le r < \infty$ erfüllt $|\cdot|_r$ für $x, y \in W(\mathfrak{o}_F)_L$ die Eigenschaften

i) $|x|_r = 0 \iff x = 0$,

ii) $|xy|_r \le |x|_r|y|_r$,

iii) $|x+y| \le \max(|x|_r, |y|_r)$.

Beweis: Die erste Eigenschaft ist eine direkte Konsequenz aus der Definition von $|\cdot|_r$ und gilt sogar für alle $x \in W(F)_L$. Wir wenden nun das vorige Lemma an und erhalten für $x, y \in W(\mathfrak{o}_F)_L$

$$\begin{aligned}
|x+y|_r &= \sup_{k\ge 0}\left\{q^{-k}N_k(x+y)^r\right\} \le \sup_{k\ge 0}\left\{q^{-k}\max\{N_k(x), N_k(y)\}^r\right\} \\
&\le \max\left\{\sup_{k\ge 0}\{q^{-k}N_k(x)^r\}, \sup_{k\ge 0}\{q^{-k}N_k(y)^r\}\right\} \\
&= \max\left\{|x|_r, |y|_r\right\}
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
|xy|_r &= \sup_{k\geq 0}\left\{q^{-k}N_k(xy)^r\right\} \leq \sup_{k\geq 0}\left\{q^{-k}\sup_{i+j=k}\left\{N_i(x)^r N_j(y)^r\right\}\right\}\\
&= \sup_{k\geq 0}\left\{\sup_{i+j=k}\left\{q^{-i}N_i(x)^r q^{-j}N_j(y)^r\right\}\right\} = \sup_{k\geq 0}\left\{q^{-k}N_k(x)^r\right\}\cdot \sup_{k\geq 0}\left\{q^{-k}N_k(y)^r\right\}\\
&= |x|_r|y|_r
\end{aligned}
$$

und damit ii) und iii). □

Wir können dies auf $\tilde{\mathbb{A}}_L = W(F)_L$ übertragen. Es gilt das

Lemma 5.5
Für $0 \leq r < \infty$ erfüllt $|\cdot|_r$ für $x, y \in \tilde{\mathbb{A}}_L$ die Eigenschaften

i) $|x|_r = 0 \iff x = 0$,

ii) $|xy|_r \leq |x|_r|y|_r$,

iii) $|x+y| \leq \max(|x|_r, |y|_r)$.

Beweis: Für $x = \sum_{n=0}^{N} \pi^n \tau(x_n), y = \sum_{n=0}^{M} \pi^n \tau(y_n) \in W(F)_L$ finden wir $a \in F\backslash\{0\}$ mit $\tau(a)x, \tau(a)y \in W(\mathfrak{o}_F)_L$. Dann folgen die Aussagen für x und y wegen $|\tau(a)x|_r = |a|_\flat^r|x|_r$. Für ein beliebiges $x = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n\tau(x_n)$ schreiben wir $x^{(N)} = \sum_{n=0}^{N-1}\pi^n\tau(x_n)$ und erhalten so

$$|(x+y)^{(N)}|_r = |(x^{(N)} + y^{(N)})^{(N)}|_r \leq |x^{(N)} + y^{(N)}|_r \leq \max\{|x^{(N)}|_r, |y^{(N)}|_r\}.$$

Die dritte Aussage folgt nun, da für $x \in W(F)_L$ bereits $|x| = \lim_{N\to\infty} |x^{(N)}|_r$ per Konstruktion von $|\cdot|_r$ gilt. Mit dem gleichen Argument sehen wir auch ii). □

Lemma 5.6
Für $x, y \in W(F)_L$ mit $|x|_r, |y|_r < \infty$ gilt sogar $|xy|_r = |x|_r|y|_r$.

Beweis: Für $r = 0$ stammt $|\cdot|_r$ von der π-adischen Bewertung und ist daher multiplikativ, vergleiche auch Bemerkung 5.2i). Seien $0 \neq x, y \in W(F)_L$. Beachte zunächst, dass auch $|x|_t < \infty$, $|y|_t < \infty$ für alle $t \leq r$ nach Bemerkung 5.2ii). Zunächst wollen wir zeigen, dass $\lim_{t\nearrow r}|x|_t = |x|_r$ gilt. Dafür betrachten wir die Funktion $t \mapsto |x|_t^{\frac{1}{t}}$, die als Supremum stetiger Funktionen unterhalbstetig ist, also $|x|_r^{\frac{1}{r}} \leq \liminf_{t\nearrow r}|x|_t^{\frac{1}{t}}$ erfüllt. Aus Bemerkung 5.2ii) erhalten wir für $t_1 < t_2$ die Ungleichung $|x|_{t_1} \leq |x|_{t_2}^{\frac{t_1}{t_2}}$ und daher $|x|_{t_1}^{\frac{1}{t_1}} \leq |x|_{t_2}^{\frac{1}{t_2}}$, sodass die Funktion $t \mapsto |x|_t^{\frac{1}{t}}$ monoton wachsend, also insbesondere oberhalbstetig in r ist, also $|x|_r^{\frac{1}{r}} \geq \limsup_{t\nearrow r}|x|_t^{\frac{1}{t}}$ erfüllt und damit stetig in r ist. Folglich ist die Verkettung $t \mapsto |x|_t = e^{t\cdot\log(|x|_t^{\frac{1}{t}})}$ ebenfalls stetig in r und wir erhalten $\lim_{t\nearrow r}|x|_t = |x|_r$.
Da $|x|_r$ endlich ist, konvergiert

$$0 \leq q^{-m}|x_m|_\flat^t = q^{-m}|x_m|_\flat^{r\frac{t}{r}} = (q^{-m}|x_m|_\flat)^{\frac{t}{r}} \cdot q^{-m(1-\frac{t}{r})} \leq |x|_r^{\frac{t}{r}} q^{-m(1-\frac{t}{r})}$$

wegen $t < r$ gegen 0, wenn $m \to \infty$ geht. Wir finden daher minimale $j, k \in \mathbb{N}$ mit $|x|_t = q^{-j}|x_j|_\flat^t$ und $|y|_t = q^{-k}|y_k|^t$. Wir setzen $x' = \sum_{n=j}^\infty \pi^n \tau(x_n)$, $y' = \sum_{n=k}^\infty \pi^n \tau(y_n)$ und $x'y' = \sum_{n=j+k}^\infty \pi^n \tau(z_n)$. Wegen der Multiplikativität von τ ist $z_{j+k} = x_j y_k$. Nun ist

$$|x'y'|_t \geq q^{-j-k}|z_{j+k}|_\flat^t = q^{-j}|x_j|_\flat^t q^{-k}|y_k|^t = |x|_t|y|_t = |x'|_t|y'|_t$$

und wegen der bereits gezeigten Submultiplikativität gilt hier bereits Gleichheit. Aus der Minimalität von j und k folgt $|x - x'|_t < |x|_t$ und $|y - y'|_t < |y|_t$, wobei wir hier auch benutzen, dass x, y von Null verschieden sind. Mit der starken Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}|xy - x'y'|_t &= |(x - x')y - x'(y' - y)|_t \leq \max\{|(x - x')y|_t, |x'(y - y')|_t\} \\ &\leq \max\{< x - x'|_t|y|_t, |x'|_t|y - y'|_t\} \\ &< |x|_t|y|_t = |x'y'|_t\end{aligned}$$

und damit $|xy|_t = |(xy - x'y') + x'y'|_t = |x'y'|_t = |x|_t|y|_t$. Insgesamt bildet $|\cdot|_r$ auf $\{x \in W(F)_L : |x|_r < \infty\}$ einen nicht-archimedischen Absolutbetrag.

□

Bemerkung 5.7
Mit den gleichen Beweisen gelten die Aussagen auch für $|\cdot|_r : \tilde{\mathbb{A}} \to [0, \infty]$.

Für $s < r$ ist wegen Bemerkung 5.2 $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,s)} := \{x \in \tilde{\mathbb{A}}_L : |x|_s < \infty\}$. Wir können daher die gesuchten Unterringe definieren durch

$$\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger := \bigcup_{r>0} \tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbb{A}}^\dagger := \bigcup_{r>0} \tilde{\mathbb{A}}^{(0,r)} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}.$$

Nach Bemerkung 5.2iv) sind das Algebren über $W(\mathfrak{o}_F)_L$. Der Homomorphismus $\varphi : W(F)_L \to W(F)_L$ mit $(a_n)_n \mapsto (a_n^q)_n$ erfüllt für $x \in \tilde{\mathbb{A}}_L$ (bzw. $x \in \tilde{\mathbb{A}}$) $|\varphi(x)|_r = |x|_{qr}$. Insbesondere lässt sich φ auf $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ einschränken. Für $\sigma \in G$ und für $\sigma \in \Gamma$ gilt sogar $|\sigma(x)|_r = |x|_r$ für alle $x \in \tilde{\mathbb{A}}_L$ und $x \in \tilde{\mathbb{A}}$, da $|\cdot|_\flat \circ \sigma = |\cdot|_\flat$. Statten wir $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$ und $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ mit den jeweiligen Teilraumtopologien aus, so sind φ und die Operationen noch immer stetig.

5.2 Alternative Beschreibung

In diesem Unterkapitel geht es darum, die Herkunft des Namens von $\tilde{\mathbb{A}}_L$ als *Ring der überkonvergenten Elemente* zu klären. Dabei nutzen wir die Identifikation von F als Potenzreihen in ω und die Identifikation von $\tilde{\mathbb{A}}_L$ aus Proposition 4.6.

Wir setzen für $0 \leq r < \infty$

$$R_r := q^{-rq/(q-1)}.$$

Lemma 5.8
Sei $A = \iota(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ der Ring unter dem Isomorphismus ι aus 4.6. Für $0 \leq r < \infty$ betrachte die Abbildung $\|\cdot\|_r : A \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ mit $\|f\|_r := \sup_{m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]}\{|a_m| R_r^m\}$ für $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m X^m$. Dann ist $\|\cdot\|_r$ submultiplikativ und erfüllt die starke Dreiecksungleichung.

Beweis: Seien $f, g \in A$ mit $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m X^m$ und $g = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} b_m X^m$ mit $a_m, b_m \in W_L$. Dann ist

$$\begin{aligned}
||f+g||_r &= \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{|a_m + b_m| R_r^m\} \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{\max\{|a_m|, |b_m|\} R_r^m\} \\
&\leq \max\left\{ \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{|a_m| R_r^m\}, \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{|b_m| R_r^m\} \right\} \\
&= \max\{||f||_r, ||g||_r\}.
\end{aligned}$$

Außerdem ist $fg = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} X^m \sum_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_k b_{m-k} \in A$ und daher

$$\begin{aligned}
||fg||_r &= \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{|\sum_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_k b_{m-k}| R_r^m\} \\
&\leq \sup_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{\sup_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{|a_k b_{m-k}|\} R_r^m\} \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{|a_k| R_r^k\} \cdot \sup_{k\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} \{|b_k| R_r^k\} \\
&= ||f||_r \cdot ||g||_r.
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.9

Wie in Lemma 5.6 zeigt sich, dass für $f, g \in A$ mit $||f||_r, ||g||_r < \infty$ sogar $||fg||_r = ||f||_r ||g||_r$ gilt.

Beweis: Für $r = 0$ zeigt man, dass $||\cdot||_r$ von der π-adischen Bewertung stammt, vergleiche auch mit dem Beweis von Proposition 4.6. Angenommen, $f \neq 0$. Wir wollen nun für $0 < t < r$ zeigen, dass ein minimales $j \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ existiert mit $||f||_t = |a_j| R_t^j$. Dafür stellen wir zunächst fest, dass

$$|a_m| R_t^m = |a_m| R_r^m \cdot \left(\frac{R_t}{R_r}\right)^m \leq ||f||_r \left(\frac{R_t}{R_r}\right)^m \to 0$$

bei $m \to -\infty$. Außerdem ist wegen $R_t < 1$ und $|a_m| \leq 1$ auch $\lim_{m\to\infty} |a_m| R_t^m = 0$. Sei nun $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{Z}[p^{-1}]$. Ist $C = \inf_{k\in\mathbb{N}} m_k$, so wählen wir zu $\epsilon > 0$ ein $M_1 > 0$ mit $\epsilon R_t^{-C} > |p|^{M_1}$. Setzen wir weiter $M_2 = \sup_{k\in\mathbb{N}} m_k$ und $M = \max\{M_1, M_2\}$, so gilt $|a_{m_k}| R_t^{m_k} \leq |a_{m_k}| R_t^C < |p|^M R_t^C \leq |p|^{M_1} R_t^C < \epsilon$ für fast alle $m_k < M$. Insbesondere kann eine beschränkte Folge $(m_k)_k$, für die $|a_{m_k}| R_t^{m_k}$ nicht gegen 0 konvergiert, nur aus endlich vielen verschiedenen Folgengliedern bestehen. Ist also $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ für die $|a_{m_k}| R_t^{m_k}$ gegen $||f||_t \neq 0$ konvergiert, so kann diese nur aus endlich vielen verschiedenen m_k's bestehen. Wir finden also $j \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ mit $||f||_t = |a_j| R_t^j$. Außerdem folgt daraus auch, dass wir j minimal wählen können. Der restliche Beweis folgt der gleichen Strategie wie der Beweis von 5.6. □

Lemma 5.10

Der Unterring $A^{(0,r)} = \{f \in A : ||f||_r < \infty\}$ ist vollständig bezüglich $||\cdot||_r$ für alle $0 < r < \infty$.

Beweis: Sei $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $A^{(0,r)}$ bezüglich $||\cdot||_r$ mit $f^{(n)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m^{(n)} X^m$. Zu

$\epsilon > 0$ finden wir $N \in \mathbb{N}$ mit $||f^{(n)} - f^{(k)}||_r < \epsilon$ für alle $n, k \geq N$. Insbesondere ist für alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$

$$|a_m^{(n)} - a_m^{(k)}| R_r^m \leq ||f^{(n)} - f^{(k)}||_r < \epsilon,$$

also bildet für alle m die Folge $(a_m^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im vollständigen Ring W_L. Wir setzen $a_m = \lim_{n\to\infty} a_m^{(n)}$ und $f = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m X^m$. Zunächst zeigen wir, dass $f \in A = \iota(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ liegt, also dass für alle reellen Zahlen M nur endlich viele $m < M$ mit $v_p(a_m) < M$ existieren. Wegen $v_p(\cdot) = \frac{log|(\cdot)|}{log|p|} = log_{|p|}(\cdot)$ ist $v_p(a_m) < M$ äquivalent zu $|a_m| > |p|^M$. Sei nun $M \in \mathbb{R}$. Wir finden $N \geq 0$, sodass $||f^{(k)} - f^{(n)}||_r < |p|^M R_r^M$ für alle $n, k \geq N$ ist. Insbesondere gilt für alle $m < M$

$$|a_m^{(k)} - a_m^{(n)}| R_r^m \leq ||f^{(k)} - f^{(n)}||_r < |p|^M R_r^M,$$

also $|a_m^{(k)} - a_m^{(n)}| < |p|^M R_r^{M-m} < |p|^M$. Für alle $m < M$ mit $|a_m| > |p|^M$ gilt für alle $n \geq N$ auch

$$|a_m - a_m^{(n)}| = |(a_m - a_m^{(k)}) - (a_m^{(n)} - a_m^{(k)})| < |p|^m,$$

wobei $k \geq N$ jeweils abhängig von m gewählt wird, da $a_m^{(k)}$ gegen a_m konvergiert. Dann muss wegen der starken Dreiecksungleichung $|a_m^{(n)}| = |a_m| > |p|^M$ für alle $n \geq N$ sein. Zu festem $n \geq N$ existieren nur endlich viele solcher m. Damit erfüllt auch f die Bedingung an die Koeffizienten aus Proposition 4.6.

Da Cauchyfolgen beschränkt sind, existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $||f^{(n)}||_r \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $|a_m| R_r^m = \lim_{n\to\infty} |a_m^{(n)}| R_r^m \leq \lim_{n\to\infty} ||f^{(n)}||_r \leq c$ für alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$, und damit $||f||_r \leq c$, also $f \in A^{(0,r)}$. Wir beenden den Beweis, indem wir zeigen, dass f der Grenzwert von $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dafür wählen wir $\epsilon > 0$ und finden $N \in \mathbb{N}$, sodass $||f^{(k)} - f^{(n)}||_r < \epsilon$, also $|a_m^{(k)} - a_m^{(n)}| R_r^m < \epsilon$ für alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ und $n, k \geq N$. Außerdem finden wir für alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ ein $N_m \geq N$, sodass $|a_m - a_m^{(k)}| R_r^m < \epsilon$ für alle $k \geq N_m$. Insbesondere ist

$$|a_m - a_m^{(n)}| R_r^m = |(a_m - a_m^{(k)}) - (a_m^{(k)} - a_m^{(n)})| R_r^m < \epsilon$$

für alle $n \geq N$ und alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$, sodass $||f - f^{(n)}||_r < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt und damit f der Grenzwert von $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in R ist. $\square$

Proposition 5.11

Sei $x \in \tilde{\mathbb{A}}_L$ und $f = \iota(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m X^m$ die zu x zugehörige Reihe unter dem Isomorphismus ι aus Proposition 4.6 mit $a_m \in W_L = \mathfrak{o} \otimes_{W(\mathfrak{K})} W(\overline{\mathfrak{K}}) = W(\overline{\mathfrak{K}})_L$. Dann ist für $0 < r < \infty$

$$|x|_r = ||f||_r := \sup_m \{|a_m| R_r^m\}.$$

Bemerkung 5.12

Die Aussage ist auch für $r = 0$ wahr. Dafür bemerkt man, dass beide Normen von der π-adischen Bewertung stammen.

Beweis: Wir haben im Beweis von 4.6 bemerkt, dass $\iota(\tau(\omega^m)) = X^m$ für alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ gilt. Wir zeigen die Aussage zunächst für Elemente $\tau(y)$ mit $y \in F$, also dass $|\tau(y)|_r = ||\iota(\tau(y))||_r$ gilt. Ohne

Einschränkung können wir $y \neq 0$ annehmen und wir schreiben via der Identifikation von F (vergleiche mit Proposition 1.1ii)) von [ShaPor]) $y = \omega^m \cdot v$, wobei $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]$ und $v \in \mathfrak{o}_F^*$ ist. Wegen der Multiplikativität von τ erhalten wir

$$\iota(\tau(y)) = \iota(\tau(\omega)^m) \cdot \iota(\tau(v)) = X^m \iota(\tau(v)).$$

Nun ist zusammen mit v auch $\tau(v)$ und damit $\iota(\tau(v))$ eine Einheit. Wie in dem Beweis von Proposition 4.6 ist der Ring der formalen Potenzreihen $\sum_{m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]_{\geq 0}} a_m X^m$ ein π-adisch vollständiger und separierter Ring, dessen Reduktion $\mathfrak{o}_F$ ist. Aus Korollar 2.27 (wobei B der Ring der formalen Potenzreihen mit $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]_{\geq 0}$ ist) erhalten wir $\|\iota(W(\mathfrak{o}_F)_L)\|_r \subseteq [0,1]$ und wegen

$$1 \leq \|\iota(\tau(v))\|_r \cdot \|\iota(\tau(v))^{-1}\|_r \leq 1$$

gilt sogar $\|\iota(\tau(v))\|_r = 1$. Insgesamt erhalten wir $|\tau(y)|_r = |\omega^m \cdot v|_\flat^r = |\omega^m|_\flat^r = R_r^m = \|X^m\|_r = \|\iota(\tau(y))\|_r$.

Sei nun $x = \sum_{n=0}^\infty \pi^n \tau(x_n)$ in $W(F)_L = \tilde{\mathbb{A}}_L$ und $a_m = \sum_{n=0}^\infty \pi^n \tau(\alpha_{n,m}) \in W(\overline{\mathfrak{K}})_L$ mit $\iota(x) = f = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]} \pi^n \tau(\alpha_{n,m}) X^m$. Es ist $|a_m| = q^{-\min\{n | \alpha_{n,m} \neq 0\}}$, da $\tau \colon \overline{\mathfrak{K}} \to W(\overline{\mathfrak{K}})_L$ ein vollständiges Repräsentantensystem liefert. Wir erhalten

$$\|f\|_r := \sup_{m \in \mathbb{N}} \{|a_m| R_r^m\} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{\max_{n \in \mathbb{N}} q^{-n} R_r^m \colon \alpha_{n,m} \neq 0\} = \sup_{n,m \in \mathbb{N}} \{q^{-n} R_r^m \colon \alpha_{n,m} \neq 0\}.$$

Modulo π erhalten wir in F die Gleichung $x_0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]} \alpha_{0,m} \omega^m$. Also

$$|\tau(x_0)|_r = |x_0|_\flat^r = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{|\omega|_\flat^{rm} \colon \alpha_{0,m} \neq 0\} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \{R_r^m \colon \alpha_{0,m} \neq 0\} = \|f_0\|_r,$$

wobei wir $f_0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]} \tau(\alpha_{0,m}) X^m$ setzen.

Betrachten wir nun $x' = x - \tau(x_0), f'' = f - f_0$. So gilt nach Definition der Beträge bzw. obiger Umformulierung $|x|_r = \sup\{|\tau(x_0)|_r, |x'|_r\}$ und $\|f\|_r = \sup\{\|f_0\|_r, \|f''\|_r\}$. Sei nun $f' = f - \iota(\tau(x_0))$ die zu x' zugehörige Reihe. Wir erhalten wegen $\|\iota(\tau(x_0))\|_r = |\tau(x_0)|_r = \|f_0\|_r$

$$\|f_0 - \iota(\tau(x_0))\|_r \leq \max\{\|f_0\|_r, |\iota(\tau(x_0))|_r\} = \|f_0\|_r$$

und können damit $\|f\|_r = \sup\{\|f_0\|_r, \|f'\|_r\}$ zeigen. Wegen $\|f\|_r = \sup\{\|f_0\|_r, \|f''\|_r\} \geq \|f_0\|_r$ nehmen wir zunächst an, dass $\|f\|_r > \|f_0\|_r$ ist und erhalten wegen $\|f_0 - \iota(\tau(x_0))\|_r \leq \|f_0\|_r < \|f\|_r = \|f''\|_r$

$$\|f\|_r = \|f''\|_r = \|f'' + (f_0 - \iota(\tau(x_0))\|_r = \|(f - f_0) + (f_0 - \iota(\tau(x_0)))\|_r = \|f - \iota(\tau(x_0))\|_r = \|f'\|_r,$$

also $\|f\|_r = \|f'\| = \sup\{\|f_0\|_r, \|f'\|_r\}$. Ist andererseits $\|f\|_r = \|f_0\|_r$, so ist $\|f'\|_r = \|f - \iota(\tau(x_0))\|_r \leq \sup\{\|f\|_r, \|f_0\|\} = \|f\|$, also ebenfalls $\|f\|_r = \sup\{\|f_0\|_r, \|f'\|_r\}$. Setzen wir nun $x^{(1)} = \frac{x'}{\pi}$ und $f^{(1)} = \frac{f'}{\pi}$, so erhalten wir eine Rekursion. Es bleibt zu zeigen, dass diese abbricht. Ist $|x|_r < \infty$, so können wir erneut mit dem $t < r$-Trick annehmen, dass $j \in \mathbb{N}$ existiert mit $|x|_r = q^{-j}|x_j|_\flat^r$. Die Rekursion bricht dann nach $j+1$ Schritten ab, denn $x^{(j)} = \sum_{k=0}^\infty \pi^k \tau(x_{k+j})$ und daher $|x|_r = |\pi^j \tau(x_j)|_r = \|\pi^j f_0^{(j)}\|_r = \|f\|_r$. Ist dagegen $|x|_r = \infty$, so ist die Folge $\pi^n \tau(x_n)$ unbeschränkt und damit ist auch die Folge $\pi^n f_0^{(n)}$

unbeschränkt. Insbesondere ist aber $\|f\|_r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_0^{(n)}\}$ ebenfalls unendlich. Insgesamt erhalten wir die Behauptung, dass $|x|_r = \|\iota(x)\|_r$ für alle $x \in \tilde{\mathbb{A}}_L$. □

Für $0 < R < 1$ betrachten wir nun $V(R,1) = \{X : R < |X| < 1\}$ als rigid analytischen Kreisring über dem Quotientenkörper von W_L und setzen $\tilde{V}(R,1) = \varprojlim_{X\mapsto X^p}(V(R^{p^{-n}},1))$. Der Einfachheit halber ist hierbei X stets als Element von $\widehat{\overline{\mathrm{Quot}(W_L)}}$ aufzufassen (Komplettierung eines algebraischen Abschlusses).

Korollar 5.13

i) $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ *besteht aus den Elementen* $f \in \tilde{\mathbb{A}}_L$*, die auf* $\tilde{V}(R,1)$ *für ein* $R < 1$ *konvergieren.*

ii) Für $0 < r < \infty$ *besteht* $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)}$ *aus den Elementen* $f \in \tilde{\mathbb{A}}_L$*, die auf* $\tilde{V}(R_r,1)$ *konvergieren und beschränkt sind.*

Beweis: Für ii) schreiben wir $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]} a_m X^m \in \tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)}$ als $f = f^+ + f^-$ mit $f^+ = \sum_{m\geq 0} a_m X^m$ und $f^- = \sum_{m<0} a_m X^m$. Wir müssen für die Konvergenz von $f^+ = \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]_{\geq 0}} a_m X^m$ zeigen, dass zu $\epsilon > 0$ und $X \in V(R_r,1)$ nur endlich viele $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]_{\geq 0}$ existieren mit $|a_m X^m| \geq \epsilon$. Für $f \in \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ und $\epsilon > 0$ setzen wir $M \in \mathbb{R}$ so groß, dass für festes $X \in \tilde{V}(R_r,1)$ bereits $|X|^M < \epsilon$ und $|p|^M < \epsilon$ ist. Nach Voraussetzung an die Koeffizienten von f finden wir nur endlich viele $0 \leq m < M$ mit $|a_m| > |p|^M$. Damit ist $|a_m X^m| = |a_m||X|^m < \epsilon$ für fast alle $m \in \mathbb{Z}[p^{-1}]_{\geq 0}$, da sowohl $|a_m| \leq 1$ als auch $|X| < 1$ gilt. Daher ist f^+ konvergent auf $\tilde{V}(R_r,1)$. Konvergiert f auf $\tilde{V}(R_r,1)$, so ist $\|f^+\|_r = \sup_{m\geq 0}\{|a_m|R_r^m\} \leq 1$ für alle $r > 0$ nach dem Maximumsprinzip der rigiden Geometrie und daher $f^+ \in \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ beschränkt.

Für die Konvergenz von f^- sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Wir finden $C \in \mathbb{R}_{<0}$ mit $|a_m||X^m| < \epsilon$ für alle $m \leq C$. Setzen wir nun $M > 0$ so groß, dass $\epsilon \cdot |X|^{-C} > |p|^M$, so finden wir nur endlich viele $m < M$ mit $|a_m| > |p|^M$. Insbesondere ist $|a_m||X^m| \leq |a_m||X^C| < \epsilon$ für fast alle $C < m < 0 < M$, also f^- konvergent auf $\tilde{V}(R_r,1)$. Es gilt $|f^-(x)| \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}[p^{-1}]_{<0}} |a_m|R_r^m \leq \|f\|_r < \infty$, also ist f^- und damit f beschränkt auf $V(R_r,1)$. Ist andererseits f beschränkt und konvergent auf $\tilde{V}(R_r,1)$, also $\sup_m\{|a_m X^m|\} \leq c$ für alle $X \in \tilde{V}(R_r,1)$, so ist auch $\|f\|_r \leq c$ und damit $f \in \tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)}$. Damit ist ii) bewiesen. Für i) sei $f \in \tilde{\mathbb{A}}_L$ konvergent auf $\tilde{V}(R,1)$ für ein $R < 1$. Ist nun $r > 0$, sodass $R > R_r > 1$, so ist f auf $\tilde{V}(R_r,1)$ konvergent und beschränkt, da $|a_m||R_r^m| = |a_m|R^m \cdot (\frac{R_r}{R})^m \to 0$ bei $m \to -\infty$. □

5.3 Eigenschaften von $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$

Lemma 5.14

Für $0 < r < \infty$ *ist* $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)} = \{x \in \tilde{\mathbb{A}}_L : |x|_r < \infty\}$ *vollständig bezüglich* $|\cdot|_r$.

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus 5.10 und 5.11. □

Proposition 5.15

Es gilt $\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger = \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cap \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L$ *und* $\pi^n\tilde{\mathbb{A}}^\dagger = \tilde{\mathbb{A}}^\dagger \cap \pi^n\tilde{\mathbb{A}}$.

Beweis: Sei $x \in \tilde{\mathbb{A}}_L$ mit $\pi^n x \in \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cap \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L$. Wir finden $r > 0$ mit $|\pi^n x|_r < \infty$. Nun gilt per Definition $|\pi^n x|_r = q^{-n}|x|_r$, also ist auch $|x|_r$ endlich und damit $\pi^n x \in \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$. Der Beweis für $\tilde{\mathbb{A}}$ verläuft analog. □

Proposition 5.16

$\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ *und* $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$ *sind diskrete Bewertungsringe mit Uniformisierer* π *und Restklassenkörper* F *bzw.* F^{sep}.

Beweis: Sei zunächst $x = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n \tau(x_n) \in \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \backslash \pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$, also $x_0 \neq 0$ nach Proposition 5.15. Wir wollen zeigen, dass x invertierbar in $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ ist. Nach Multiplikation mit $\tau(x_0^{-1}) \in W(F)_L$ können wir $x_0 = 1$ annehmen. Sei $y \in \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ mit $1 - x = \pi y$ und sei $r > 0$ mit $|1 - x|_r < \infty$. Da auch $|y|_r$ endlich ist, finden wir wegen $|y|_s \leq |y|_r^{\frac{s}{r}}$ zu $\frac{q+1}{2} > 1$ ein $r > s > 0$, sodass $|y|_s \leq \frac{q+1}{2}$ und damit $|1 - x|_s = |\pi y|_s \leq q^{-1} \frac{q+1}{2} < 1$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - x)^n$ konvergiert daher im vollständigen Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,s)}$ bezüglich $|\cdot|_s$ und liefert ein multiplikatives Inverses von $1 - (1 - x) = x$. Daher ist $\pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ das einzige maximale Ideal. Aus Bemerkung 1.1.20 von [Sch17] folgt außerdem wegen $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L = 0$, dass $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ ein Hauptidealring ist, wobei $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ als Unterring von $\tilde{\mathbb{A}}_L$ nullteilerfrei ist. Damit ist $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ ein diskreter Bewertungsring.

Wir erhalten aus Proposition 5.15 eine Injektion $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \hookrightarrow \tilde{\mathbb{A}}_L / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L \cong F$. Außerdem haben wir in Bemerkung 5.2 $W(\mathfrak{o}_F)_L \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ gesehen. Ist $x = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n \tau(x_n) \in \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \subseteq W(F)_L$ mit $\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^n \tau(x_{n-1}) \in W(\mathfrak{o}_F)_L$, so ist $x_{n-1} \in \mathfrak{o}_F$ aufgrund der eindeutigen Darstellung in 2.24. Damit ist bereits $x \in W(\mathfrak{o}_F)_L$ und es gilt $\pi W(\mathfrak{o}_F)_L = W(\mathfrak{o}_F)_L \cap \pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$. Wir erhalten also auch eine Injektion $\mathfrak{o}_F \overset{2.17}{\cong} W(\mathfrak{o}_F)_L / \pi W(\mathfrak{o}_F)_L \hookrightarrow \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$. Also $F = \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_F) \hookrightarrow \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ und damit $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cong F$.

Genauso zeigt sich, dass $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$ ein diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer π und Restklassenkörper F^{sep} ist. □

Korollar 5.17
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}_L / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L$ und $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}} / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}$.

Der Beweis folgt per Induktion aus einem allgemeinen Resultat für Moduln.

Lemma 5.18
Sind M, N R-Moduln für einen kommutativen Ring R, $\psi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, $M' \subseteq M, N' \subseteq N$ R-Untermoduln mit $M' \overset{\psi_{|M'}}{\cong} N'$ und $M/M' \overset{\overline{\psi}}{\cong} N/N'$, so ist ψ bereits ein Isomorphismus.

Beweis: Das ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Schlangenlemma. Ein direkter Beweis geht wie folgt. Es ist $\ker \psi \subseteq \ker(M \overset{\psi}{\to} N \to N/N' \cong M/M') = M'$, aber da ψ auf M' injektiv ist, ist $\ker \psi = 0$. Für $n \in N$ finden wir $m \in M$ mit $n + N' = \psi(m) + N' \in N/N' \cong M/M'$. Also existiert $m' \in M' \cong N'$ mit $n - \psi(m) = \psi(m')$ und damit $n = \psi(m + m')$. □

Beweis: [von 5.17] Für $n = 1$ haben wir dies bereits im Beweis von Proposition 5.16 gesehen. Sei also $n > 1$. Der Untermodul $\pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi^{n-1} \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ ist nach Induktion isomorph zum Untermodul $\pi \tilde{\mathbb{A}}_L / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L \cong \tilde{\mathbb{A}}_L / \pi^{n-1} \tilde{\mathbb{A}}_L$. Außerdem ist

$$(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger) / (\pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger) \cong \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}_L / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L \cong (\tilde{\mathbb{A}}_L / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L) / (\pi \tilde{\mathbb{A}}_L / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L).$$

Nach Lemma 5.18 ist dann bereits $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}_L / \pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L$. □

5.4 Überkonvergente (φ, Γ)-Moduln

Die Definition eines überkonvergenten (φ, Γ)-Moduls verläuft ähnlich zur Definition 4.11, allerdings betrachten wir nun $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Moduln anstelle von $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Moduln. Wir versehen dafür $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ (bzw. $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$) mit der Teilraumtopologie von $\tilde{\mathbb{A}}_L$ (bzw. $\tilde{\mathbb{A}}$).

Definition 5.19
Ein *überkonvergenter (φ, Γ)-Modul* ist ein endlich erzeugter $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Modul M mit einem φ-semilinearen Endomorphismus $\varphi_M : M \to M$ und einer stetigen Γ-semilinearen Operation $\Gamma \times M \to M$, wobei wir Γ mit der Krulltopologie und M mit der von $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-induzierten Quotiententopologie ausstatten. Die Operation und der Endomorphismus φ_M sollen darüber hinaus kommutieren. M heißt *étale*, wenn φ_M bijektiv ist.

Bemerkung 5.20
Für $\alpha \in W(\mathfrak{o}_F)_L$ mit $0 < \Phi_0(\alpha) < 1$ bildet nach Bemerkung 4.7 $(\alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^m \tilde{\mathbb{A}}_L)_{m\in\mathbb{N}}$ eine offene Umgebungsbasis von 0 bezüglich der $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwachen Topologie. Dann bildet $\alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^m \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ eine Umgebungsbasis von 0 in $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$, wenn $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L$ mit der Teilraumtopologie ausgestattet ist. Dafür verwenden wir $W(\mathfrak{o}_F)_L \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ und 5.15. Insbesondere übertragen sich die Argumente von Bemerkung 4.10.

Wir erhalten die Kategorie $\mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger) \subseteq \mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ der überkonvergenten (étalen) (φ, Γ)-Moduln. Der Überkonvergenzsatz von de Shalit und Porat lässt sich in unserer Situation wie folgt formulieren:

Satz 5.21 (de Shalit/Porat)

i) Der Basiswechsel von $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ zu $\tilde{\mathbb{A}}_L$ induziert eine Äquivalenz zwischen den Kategorien $\mathrm{Mod}^{\acute{e}t}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ und $\mathrm{Mod}^{\acute{e}t}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$.

ii) Für $V \in \mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ setzen wir $\mathbb{D}^\dagger(V) := (\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H$, wobei $H = Gal(\overline{L}|L^{ab}) \subseteq G$ diagonal auf dem Tensorprodukt operiert. Es gilt $\mathbb{D}^\dagger(V) \in \mathrm{Mod}^{\acute{e}t}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ und $\mathbb{D}(V)$ ist der Basiswechsel von $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ zu $\tilde{\mathbb{A}}_L$ von $\mathbb{D}^\dagger(V)$, also $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} \mathbb{D}^\dagger(V) \cong \mathbb{D}(V)$ in $\mathrm{Mod}^{\acute{e}t}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$.

Der Beweis dieser Aussage ist das wesentliche Ziel dieser Arbeit und wird daher erst am Ende durchgeführt. Wir werden im Folgenden auf diesen Beweis hinarbeiten.

Lemma 5.22
Sei M ein étaler φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}_L$. Dann existiert ein étaler φ-Modul $M^\dagger$ über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$, der in M enthalten ist und die Eigenschaft besitzt, dass die kanonische Abbildung $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \to M$ ein Isomorphismus von φ-Moduln über $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ist.

Wir merken an, dass also $\varphi_{M^\dagger} = \varphi_M|_{M^\dagger}$. Für den Beweis benötigen wir zunächst zwei Aussagen über Matrizen. Außerdem sei an dieser Stelle bemerkt, dass der Beweis auch geführt werden kann, wenn man die Ringe $\tilde{\mathbb{A}}_L$ und $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ durch $\tilde{\mathbb{A}} = W(F^{sep})_L$ und $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$ entsprechend ersetzt.

Bemerkung 5.23
Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_d(F)$ setzen wir $|A|_\flat = \max_{i,j}\{|a_{ij}|_\flat\}$ Da $|\cdot|_\flat$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag ist, definiert dies eine submultiplikative Matrixnorm. Sind nämlich $A = (a_{ij})_{i,j},\ B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_d(F)$, so ist

$$\begin{aligned}
|AB|_\flat &= |(\sum_{k=1}^d a_{ik}b_{kj})_{i,j}|_\flat = \max_{i,j}(|\sum_{k=1}^d a_{ik}b_{kj}|_\flat) \\
&\le \max_{i,j}(\max_k(|a_{ik}b_{kj}|_\flat) \le \max_{i,j}(|a_{ij}|_\flat) \cdot \max_{i,j}(|b_{ij}|_\flat) \\
&= |A|_\flat |B|_\flat .
\end{aligned}$$

Mit gleicher Rechnung zeigt sich, dass diese Matrixnorm auch für Matrizen über $\tilde{\mathbb{A}}_L$ und $\tilde{\mathbb{A}}$ bezüglich $|\cdot|_r$ submultiplikativ ist.

Lemma 5.24
Zu $A \in \mathrm{Gl}_d(F)$ existiert eine Konstante c, die nur von A abhängt, sodass für jede Matrix $B \in \mathrm{Mat}_d(F)$ Matrizen $U, V \in \mathrm{Mat}_d(F)$ existieren mit $|V|_\flat \leq c$, sodass

$$A^{-1}\varphi(U)A - U = B - V.$$

Beweis: Wir bemerken erneut, dass der nachfolgende Beweis auch über dem Körper F^{sep} geführt werden kann. Sei

$$U = \sum_{i=1}^{N} \varphi^{-1}(A)\cdot\varphi^{-2}(A)\cdot\ldots\cdot\varphi^{-i}(A)\cdot\varphi^{-i}(B)\cdot\varphi^{-i}(A)^{-1}\cdot\ldots\cdot\varphi^{-2}(A)^{-1}\cdot\varphi^{-1}(A)^{-1}.$$

Dann bildet $A^{-1}\varphi(U)A-U$ eine Teleskopsumme und wir erhalten die Gleichheit $A^{-1}\varphi(U)A-U = B-V$ mit

$$V = \varphi^{-1}(A)\cdot\varphi^{-2}(A)\cdot\ldots\cdot\varphi^{-N}(A)\cdot\varphi^{-N}(B)\cdot\varphi^{-N}(A)^{-1}\cdot\ldots\cdot\varphi^{-2}(A)^{-1}\cdot\varphi^{-1}(A)^{-1}.$$

Wegen $|\varphi^j(x)|_\flat = |x^{q^j}|_\flat = |x|_\flat^{q^j}$ für alle $x \in F$ und $j \in \mathbb{Z}$ und der Submultiplikativität von $|\cdot|_\flat$ erhalten wir

$$|\varphi^{-1}(A)\cdot\varphi^{-2}(A)\cdots\varphi^{-N}(A)|_\flat = |A|_\flat^{q^{-1}+\ldots+q^{-N}} \leq \max\{1, |A|_\flat^{\frac{1}{q-1}}\}.$$

Genauso ist auch $|\varphi^{-N}(A)^{-1}\cdot\ldots\cdot\varphi^{-2}(A)^{-1}\cdot\varphi^{-1}(A)^{-1}|_\flat$ unabhängig von N beschränkt. Gleichzeitig konvergiert $|\varphi^{-N}(B)|_\flat = |B|_\flat^{q^{-N}}$ gegen 1 bei N gegen unendlich, sodass insgesamt V so gewählt werden kann, dass $|V|_\flat \leq c$ ist. □

Lemma 5.25
Für einen noetherschen Ring R ist eine surjektive R-lineare Abbildung f zwischen zwei freien R-Moduln vom Rang n bereits bijektiv. Insbesondere ist eine quadratische $n \times n$ Matrix genau dann invertierbar über R, wenn die Spalten ein Erzeugendensystem von R^n bilden.

Beweis: Bezeichne $K_m := \ker(f^m)$ und sei $x \in K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq R^n$. Da R noethersch ist, ist der R-Modul R^n noethersch nach Korollar 1.3 in Kapitel X von [Lan05] und damit ist der Untermodul $\bigcup_m K_m$ endlich erzeugt. Insbesondere finden wir m mit $K_m = K_{m+k}$ für alle $k \geq 1$. Da f surjektiv ist, ist auch f^m surjektiv, sodass wir $y \in R^n$ finden mit $x = f^m(y)$. Damit ist $0 = f(x) = f^{m+1}(y)$, also $y \in K_{m+1} = K_m$ und $x = 0$. □

Beweis: [von 5.22] Falls M ein Torsionsmodul ist, so finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $\pi^n M = 0$, da M endlich erzeugt über $\tilde{\mathbb{A}}_L$ und $\tilde{\mathbb{A}}_L$ lokal mit maximalem Ideal $\pi\tilde{\mathbb{A}}_L$ ist. Damit ist $M = M/\pi^n M$ ein endlich erzeugter $\tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L \overset{5.17}{\cong} \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Modul, also auch über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ endlich erzeugt. Wir können $M^\dagger := M$ setzen und erhalten einen étalen φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ mit $\varphi_{M^\dagger} = \varphi_M$. Für die geforderte Isomorphie sehen wir

$$\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M \cong \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M/\pi^n M \cong \tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M/\pi^n M \cong M/\pi^n M = M.$$

Sei nun M torsionsfrei. Da $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ein Hauptidealring ist, ist M frei nach Theorem 7.3 in Kapitel 3 von [Lan05]. Wir wählen eine Basis $e_1, \dots, e_d$ über $\tilde{\mathbb{A}}_L$. Die zugehörige Abbildungsmatrix von φ_M sei gegeben durch $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L)$, also $\varphi_M(e_j) = \sum_{i=1}^d a_{ij} e_i$. Ist nun $U = (u_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ und $e'_j = \sum_{i=1}^d u_{ij} e_i$, so bildet $e'_1, \dots, e'_d$ eine weitere $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Basis von M und die Matrix von φ_M besitzt bezüglich dieser Basis die Darstellungsmatrix $U^{-1} A \varphi(U)$. Dafür berechnen wir mit $U^{-1} = (v_{ij})_{i,j}$

$$\begin{aligned}
\varphi_M(e'_j) &= \varphi_M\Big(\sum_{i=1}^d u_{ij} e_i\Big) = \sum_{i=1}^d \varphi(u_{ij}) \varphi_M(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^d \varphi(u_{ij}) \sum_{k=1}^d a_{ki} e_k = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \varphi(u_{ij}) a_{ki} \sum_{l=1}^d v_{lk} e'_l \\
&= \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d v_{lk} a_{ki} \varphi(u_{ij}) e'_l
\end{aligned}$$

und $(\sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d u_{kl}^{-1} a_{ki} \varphi(u_{ij}))_l$ ist die j-te Spalte von

$$U^{-1} A \varphi(U) = (v_{lk})_{l,k} (a_{ki})_{k,i} (\varphi(u_{ij}))_{i,j} = (v_{lk})_{l,k} \Big(\sum_{i=1}^d a_{ki} \varphi(u_{ij})\Big)_{k,j} = \Big(\sum_{k=1}^d v_{lk} \sum_{i=1}^d a_{ki} \varphi(u_{ij})\Big)_{l,j}.$$

Unser Ziel ist es nun, ein solches U zu finden, sodass $C := U^{-1} A \varphi(U) \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ invertierbar über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ ist, denn dann können wir $M^\dagger = \sum_{j=1}^d \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger e'_j$ wählen. Dies wäre dann ein endlich erzeugter $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Modul mit bijektivem φ-semilinearem Endomorphismus $\varphi_{M^\dagger} = (\varphi_M)_{|M^\dagger}$, da $C \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$. Da $e'_1, \dots, e'_d$ eine $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Basis von M ist, ist die Abbildung $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \to M$ ein Isomorphismus.

Wir schreiben nun zunächst $A = \sum_{n=0}^\infty \pi^n \tau(A_n) \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ mit $A_n \in \mathrm{Mat}_d(F)$, wobei wir $\tau(X) = (\tau(x_{ij}))_{i,j}$ für eine Matrix $X = (x_{ij})_{i,j}$ schreiben und erneut $\tilde{\mathbb{A}}_L = W(F)_L$ benutzen. Wir bemerken, dass $A_0 = A \mod \pi$ in $\mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L) = \mathrm{Gl}_d(F)$ invertierbar ist. Schreiben wir auch $U = \sum_{n=0}^\infty \pi^n \tau(U_n)$ mit $U_n \in \mathrm{Mat}_d(F)$ und $C = U^{-1} A \varphi(U) = \sum_{n=0}^\infty \pi^n \tau(C_n)$ und bezeichnen wir mit $|C_n|_\flat$ das Maximum der Beträge der Einträge von C_n, so versuchen wir nun, U und C so zu konstruieren, dass $|C_n|_\flat$ beschränkt ist mit einer Schranke, die von n unabhängig ist.

Setze $U_0 = I$ als die Einheitsmatrix. Angenommen $U_0, \dots, U_{n-1}$ seien bereits für $n \geq 1$ konstruiert. Seien $U' = \sum_{i=0}^{n-1} \pi^i \tau(U_i) \in \mathrm{Mat}_d(W(F)_L)$, $C_0 = A_0,\ C_1, \dots, C_{n-1} \in \mathrm{Mat}_d(F)$ die Matrizen mit

$$U'^{-1} A \varphi(U') \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \pi^i \tau(C_i) \mod \pi^n.$$

Dafür benötigen wir, dass U' invertierbar ist. Dies ist jedoch der Fall, da $U' \equiv I \mod \pi$ die Einheitsmatrix ist. Die Spalten von U' modulo π bilden also eine $\tilde{\mathbb{A}}_L / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L$-Basis von $\tilde{\mathbb{A}}_L^d / \pi \tilde{\mathbb{A}}_L^d$, sodass sie nach dem Lemma von Nakayama (vergleiche Kapitel 10 Lemma 4.3 in [Lan05]) bereits ein Erzeugendensystem von $\tilde{\mathbb{A}}_L^d$ sind. Nach Lemma 5.25 ist U' invertierbar.

Wir finden $B \in \mathrm{Mat}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ mit $U'^{-1} A \varphi(U') - \sum_{i=0}^{n-1} \pi^i \tau(C_i) = \pi^n B$, also

$$A \varphi(U') - U' \sum_{i=0}^{n-1} \pi^i \tau(C_i) = \pi^n U' B.$$

Wir suchen nun eine Matrix U_n und eine Matrix C_n mit

$$(U' + \pi^n \tau(U_n))^{-1} A\varphi(U' + \pi^n\tau(U_n)) \equiv \sum_{i=0}^{n} \pi^i \tau(C_i) \mod \pi^{n+1}$$

und so, dass $|C_n|_\flat$ unabhängig von n beschränkt ist. Mit obiger Argumentation ist $U' + \pi^n\tau(U_n)$ invertierbar und zwar unabhängig von der Wahl von U_n.

Sei $\overline{B}$ die Matrix B modulo π in $\mathrm{Mat}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L/\pi\tilde{\mathbb{A}}_L) = \mathrm{Mat}_d(F)$, dann erhalten wir die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& & (U' + \pi^n\tau(U_n))^{-1} A\varphi(U' + \pi^n\tau(U_n)) &\equiv \textstyle\sum_{i=0}^{n} \pi^i\tau(C_i) && \mod \pi^{n+1} \\
&\iff & A\varphi(U' + \pi^n\tau(U_n)) &\equiv (U' + \pi^n\tau(U_n)) \textstyle\sum_{i=0}^{n} \pi^i\tau(C_i) && \mod \pi^{n+1} \\
&\iff & A\varphi(U') + \pi^n A\varphi(\tau(U_n)) &\equiv U' \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \pi^i\tau(C_i) + U'\pi^n\tau(C_n) + \pi^n\tau(U_n) \sum_{i=0}^{n} \pi^i\tau(C_i) && \mod \pi^{n+1} \\
&\iff & A\varphi(U') - U' \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \pi^i\tau(C_i) + \pi^n A\tau(\varphi(U_n)) &\equiv \pi^n U'\tau(C_n) + \pi^n\tau(U_n) \textstyle\sum_{i=0}^{n} \pi^i\tau(C_i) && \mod \pi^{n+1} \\
&\iff & \pi^n U'B + \pi^n A\tau(\varphi(U_n)) &\equiv \pi^n U'\tau(C_n) + \pi^n\tau(U_n) \textstyle\sum_{i=0}^{n} \pi^i\tau(C_i) && \mod \pi^{n+1} \\
&\iff & U'B + A\tau(\varphi(U_n)) &\equiv U'\tau(C_n) + \tau(U_n) \textstyle\sum_{i=0}^{n} \pi^i\tau(C_i) && \mod \pi \\
&\iff & U_0\overline{B} + A_0\varphi(U_n) &= U_0C_n + U_nC_0 && \\
&\iff & \overline{B} + A_0\varphi(U_n) &= C_n + U_nA_0 && \\
&\iff & A_0\varphi(U_n)A_0^{-1} - U_n &= -\overline{B}A_0^{-1} + C_nA_0^{-1} && .
\end{aligned}$$

Nach Lemma 5.24 kann U_n so gewählt werden, dass $|C_nA_0^{-1}|_\flat$ und damit auch $|C_n|_\flat \overset{5.23}{\leq} |C_nA_0^{-1}|_\flat |A_0|_\flat$ unabhängig von n beschränkt ist. Damit sind die Einträge von C in $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,\infty)}$, also insbesondere in $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ und, da $C \equiv A_0 \mod \pi$ invertierbar ist, ist C mit obiger Argumentation bei U' invertierbar über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$.

Wir haben die Aussage nun gezeigt, falls M torsionsfrei oder ein Torsionsmodul ist. Ist M nun beliebig, so betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \to M_{\mathrm{tors}} \to M \overset{\mathrm{pr}}{\to} N \to 0,$$

wobei $N = M/M_{\mathrm{tors}}$ torsionsfrei ist. Da φ_M bijektiv ist, ist $\varphi_M(M_{\mathrm{tors}}) = M_{\mathrm{tors}}$. Daher bleibt N ein endlich erzeugter étaler φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}_L$, wobei φ_N von φ_M induziert wird. Wir setzen dann $M^\dagger := \mathrm{pr}^{-1}(N^\dagger)$.

Da M_{tors} endlich erzeugt ist über dem noetherschen Ring $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$, ist auch $\mathrm{pr}^{-1}(N^\dagger) \subseteq M$ ein endlich erzeugter $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Untermodul. Die Einschränkung von φ_M auf $M^\dagger = \mathrm{pr}^{-1}(N^\dagger)$ bildet erneut nach $M^\dagger$ ab, denn für $m^\dagger \in M^\dagger$ ist $\varphi_M(m^\dagger) + M_{\mathrm{tors}} = \varphi_N(m^\dagger + M_{\mathrm{tors}}) \in \varphi_N(N^\dagger) = N^\dagger$. Daher ist $M^\dagger$ ein überkonvergenter étaler φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$.

Für die Isomorphie $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \to M$ wollen wir Lemma 5.18 benutzen. Dafür bemerken wir, dass $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M_{\mathrm{tors}}^\dagger \cong M_{\mathrm{tors}}$ gilt. Da $0 \to M_{\mathrm{tors}}^\dagger \to M^\dagger \to M^\dagger/M_{\mathrm{tors}}^\dagger \to 0$ exakt ist und da $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ein torsionsfreier und damit flacher $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Modul ist (Proposition 3.2iii), Kapitel XVI in [Lan05]), ist $0 \to \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M_{\mathrm{tors}}^\dagger \to \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \to \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger/M_{\mathrm{tors}}^\dagger \to 0$ exakt, also ist $(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger)/(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M_{\mathrm{tors}}^\dagger) \cong \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} (M^\dagger/M_{\mathrm{tors}}^\dagger)$. Nun ist wegen $N^\dagger = \mathrm{pr}(M^\dagger) = M^\dagger/M_{\mathrm{tors}} = M^\dagger/M_{\mathrm{tors}}^\dagger$

$$\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} (M^\dagger/M_{\mathrm{tors}}^\dagger) = \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger \cong N = M/M_{\mathrm{tors}}.$$

Dies beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung 5.26
Aus 5.16 folgt, dass die Inklusion $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \hookrightarrow \tilde{\mathbb{A}}_L$ ein treuflacher Ringhomomorphismus ist. Daher ist für jeden $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Modul N die kanonische Abbildung $N \to \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N,\ n \mapsto 1 \otimes n$, injektiv. Insbesondere ist für $N \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N$ ein endlich erzeugter $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul, der N enthält.

Lemma 5.27
Ist $A \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$, $B \in \mathrm{Gl}_e(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$, $U \in \mathrm{Mat}_{d\times e}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ mit $A \cdot \varphi(U) = U \cdot B$, dann ist bereits $U \in \mathrm{Mat}_{d\times e}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$.

Bemerkung 5.28
Diese Aussage ist auch noch gültig, wenn wir die Ringe durch die entsprechenden Ringe $\tilde{\mathbb{A}}$ und $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$ ersetzen. Der Beweis verläuft identisch.

Beweis: Wir haben für $s < r$ bereits $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,s)}$ gesehen. Da A und B nur endlich viele Einträge besitzen, finden wir also $r > 0$, sodass die Einträge von A und B in $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)}$ liegen. Wir werden nun zeigen, dass dann auch U Einträge in $\tilde{\mathbb{A}}_L^{(0,r)}$ besitzt.

Angenommen $|B|_r \le 1$. Dann ist für $i \ge 1$ auch $|\varphi^{-i}(B)|_r = |B|_{q^{-i}r} \overset{5.2}{\le} |B|_r^{\frac{q^{-i}r}{r}} = |B|_r^{q^{-i}} \le 1$. Weiter ist für jede natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$

$$|\varphi^{-N}(B) \cdot \ldots \cdot \varphi^{-2}(B) \cdot \varphi^{-1}(B)|_r \overset{5.23}{\le} |\varphi^{-N}(B)|_r \cdot \ldots \cdot |\varphi^{-1}(B)|_r \le 1.$$

Für beliebiges B, wähle $\beta \in F^*$ mit $|\tau(\beta)|_r \overset{r<\infty}{=} |\beta|_\flat^r \ge |B|_r$. Dies ist möglich, da $|B|_r$ endlich und $|F^*|_\flat \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ unbeschränkt ist. Dann ist wegen der Multiplikativität von τ auch $\tau(\beta) \in W(F)_L^*$ und wir schreiben $B = \tau(\beta)B_0$. Es gilt wegen $|B_0|_r = |\tau(\beta)^{-1}B|_r = |\tau(\beta)^{-1}|_r|B|_r \le 1$ auch

$$\begin{aligned}
|\varphi^{-N}(B) \cdot \ldots \cdot \varphi^{-1}(B)|_r &\le |\varphi^{-N}(\tau(\beta))|_r \cdot \ldots \cdot |\varphi^{-1}(\tau(\beta))|_r \cdot |\varphi^{-N}(B_0) \cdot \ldots \cdot \varphi^{-1}(B_0)|_r \\
&\le |\tau(\beta)|_{q^{-N}r} \cdot \ldots \cdot |\tau(\beta)|_{q^{-1}r} \\
&\le |\beta|_\flat^{r(q^{-1}+\ldots+q^{-N})} \\
&\le \max\{1, |\beta|_\flat^{\frac{r}{1-\frac{1}{q}}}\}.
\end{aligned}$$

Insbesondere sind $|\varphi^{-N}(B) \cdot \ldots \cdot \varphi^{-1}(B)|_r$ und $|\varphi^{-1}(B) \cdot \ldots \cdot \varphi^{-N}(B)|_r$ unabhängig von N beschränkt. Aus der Annahme $A\varphi(U) = UB$ erhalten wir $\varphi(U) = A^{-1}UB$ und, da φ ein Ringisomorphismus ist, auch $U = (\varphi^{-1}(A))^{-1}\varphi^{-1}(U)\varphi^{-1}(B)$. Iterativ können wir daher

$$U = (\varphi^{-1}(A))^{-1}(\varphi^{-2}(A))^{-1} \cdot \ldots \cdot (\varphi^{-N}(A))^{-1} \cdot \varphi^{-N}(U) \cdot \varphi^{-N}(B) \cdot \ldots \cdot \varphi^{-1}(B)$$

schreiben. Fassen wir dies zu $U = A_N^{-1}\varphi^{-N}(U)B_N$ zusammen, so können wir aus obigen Überlegungen folgern, dass $|A_N^{-1}|_r$ und $|B_N|_r$ unabhängig von N beschränkt sind, da $(\varphi^{-i}(A))^{-1} = \varphi^{-i}(A^{-1})$.

Schreiben wir weiter $U = \sum_{i=0}^\infty \pi^i \tau(U_i)$ und bezeichnen mit $U^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \pi^i \tau(U_i)$ die Partialsumme, so ist wegen $U \equiv U^{(n)} \mod \pi^n$

$$U^{(n)} \equiv A_N^{-1}\varphi^{-N}(U^{(n)})B_N \mod \pi^n.$$

Für festes n ist $|U^{(n)}|_r$ endlich, sodass N wegen $|\varphi^{-N}(U^{(n)})|_r = |U^{(n)}|_{q^{-N}r} \leq |U^{(n)}|_r^{q^{-N}}$ groß genug gewählt werden kann, sodass $|A_N^{-1}\varphi^{-N}(U^{(n)})B_N|_r \leq c$ ist für eine nur von A und B abhängige Konstante c. Ist $V = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^i \tau(V_i)$, so ist $|V|_r = \sup_i\{q^{-i}|V_i|_\flat^r\} \geq |V^{(n)}|_r$. Für $V = A_N^{-1}\varphi^{-N}(U^{(n)})B_N$ ist $V^{(n)} = U^{(n)}$, also erhalten wir

$$|U^{(n)}|_r \leq |A_N^{-1}\varphi^{-N}(U^{(n)})B_N|_r \leq c$$

und c ist unabhängig von n. Insbesondere ist $|U^{(n)}|_r \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x = \sum_{k=0}^{\infty} \pi^k \tau(x_k)$ und $x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \pi^k \tau(x_k)$ mit $|x^{(n)}|_r \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach Definition $\sup_{0 \leq k \leq n-1}\{q^{-k}|x_k|_\flat^r\} \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $|x|_r \leq c$. Wir folgern $|U|_r \leq c$, also $U \in \mathrm{Mat}_{d \times e}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$. □

Korollar 5.29
Der Untermodul $M^\dagger \subseteq M$ aus Lemma 5.22 ist eindeutig bestimmt.

Bemerkung 5.30
Auch an dieser Stelle sei erwähnt, dass die Aussage gültig bleibt, wenn wir étale φ-Moduln über $\tilde{\mathbb{A}}$ betrachten.

Beweis: Wir nehmen erneut zunächst an, dass es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\pi^n M = 0$. Dann ist auch $\pi^n M^\dagger = 0$, da $M^\dagger \subseteq M$ ein Untermodul ist, und $M^\dagger$ wird erneut zu einem $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul. Wir erhalten die Isomorphismen

$$\begin{aligned} M^\dagger &\cong M^\dagger/\pi^n M^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger/\pi^n M^\dagger \\ &\cong \tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger/\pi^n M^\dagger \\ &\cong \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger/\pi^n M^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \\ &\cong M \end{aligned}$$

von $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Moduln. Dabei wird $m \in M^\dagger$ auf $m \in M$ in natürlicher Weise geschickt. Es ist also $M^\dagger = M$ eindeutig, falls M ein Torsionsmodul ist.

Ist M nun torsionsfrei, so ist auch $M^\dagger$ torsionsfrei und da $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ ein Hauptidealring ist, ist $M^\dagger$ frei. Es gilt $\mathrm{rk}_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger = \mathrm{rk}_{\tilde{\mathbb{A}}_L} \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$, da Tensorprodukte und direkte Summen kommutieren. Daher ist $\mathrm{rk}_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger = \mathrm{rk}_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M$. Gibt es also einen überkonvergenten φ-Untermodul $M' \subseteq M$ mit $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M' \cong M$, so wählen wir jeweils Basen $e_1, \ldots, e_d$ von $M^\dagger$ bzw. $e_1', \ldots, e_d'$ von M'. Schreiben wir $e_j' = \sum_{i=1}^d u_{ij} e_i$, so ist $U = (u_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L)$. Wir zeigen $U \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$. Wegen $M' \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M' \cong M$ (als φ-Moduln) ist $\varphi_{M'} = (\varphi_M)_{|M'}$. Insbesondere sind $M^\dagger$ und M' φ_M-invariant und wir finden $A,\ B \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ mit

$$\varphi_M(e_j) = \sum_{i=1}^d a_{ij} e_i \quad \text{und} \quad \varphi_M(e_j') = \sum_{i=1}^d b_{ij} e_i'.$$

Aus dem Beweis von Lemma 5.22 erhalten wir $A\varphi(U) = UB$, also nach Lemma 5.27 $U \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$. Damit ist $M^\dagger = M'$.

Sei nun $M \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ beliebig. Wir schreiben wie zuvor $M = M_{\text{tors}} \oplus N$, wobei $N \subseteq M$ ein freier Untermodul ist. Insbesondere ist $M_{\text{tors}}, N \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$. Ist M' ein Modul wie in 5.22, so schreiben wir auch $M' = M'_{\mathrm{tors}} \oplus N'$, wobei $N' \subseteq M'$ frei ist. Aus dem Isomorphismus

$$(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M'_{\mathrm{tors}}) \oplus (\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N') \cong \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M' \cong M = M_{\mathrm{tors}} \oplus N$$

erhalten wir Isomorphismen $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M'_{\mathrm{tors}} \cong M_{\mathrm{tors}}$ und $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N' \cong N$. Aus dem bisher Gezeigten folgt damit auch die Eindeutigkeit für $M^\dagger$ für beliebiges $M \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$. □

Korollar 5.31
Sind M und $M^\dagger$ wie in Lemma 5.22, dann gilt $(M^\dagger)^{\varphi=1} = M^{\varphi=1} = \{m \in M \mid \varphi_M(m) = m\}$.

Bemerkung 5.32
Da φ_M $W(\mathfrak{K})_L$-linear ist, ist $M^{\varphi=1}$ ein $W(\mathfrak{K})_L$-Untermodul von M.

Beweis: Angenommen, M und damit auch $M^\dagger$ sind torsionsfrei, also auch frei. Sei $e_1, \ldots, e_d$ eine $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Basis von $M^\dagger$ und wegen $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \cong M$ eine $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Basis von M und sei $A \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ die Abbildungsmatrix zu $\varphi_{M^\dagger} = (\varphi_M)_{|M^\dagger}$ bezüglich dieser Basis. Ist $m = \sum_{i=1}^d u_i e_i \in M^{\varphi=1}$, so gilt

$$\begin{aligned} \varphi_M(m) &= \sum_{i=1}^d \varphi(u_i)\varphi_M(e_i) = \sum_{i=1}^d \varphi(u_i) \sum_{k=1}^d a_{ki} e_k = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d a_{ki}\varphi(u_i) e_k \\ &\overset{\varphi_M(m)=m}{=} \sum_{k=1}^d u_k e_k \end{aligned}$$

und aus der letzten Gleichung erhalten wir $A \cdot \varphi(u) = u$. Nun ist $A \in \mathrm{Gl}_d(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$, $u \in \mathrm{Mat}_{d\times 1}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ und $1 \in \mathrm{Gl}_1(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ und damit nach Lemma 5.27 schon $u \in \mathrm{Mat}_{d\times 1}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$, also $m \in (M^\dagger)^{\varphi=1}$.

Für beliebiges M setzen wir $N = M/M_{\mathrm{tors}}$. N ist dann ein torsionsfreier, étaler φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}_L$ (vgl. Beweis von Lemma 5.22) und wie wir bereits gesehen haben, gilt $N^\dagger = M^\dagger/M_{\mathrm{tors}} = M^\dagger/M^\dagger_{\mathrm{tors}}$. Wir betrachten das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (M^\dagger_{\mathrm{tors}})^{\varphi=1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (M^\dagger)^{\varphi=1} \arrow[r] \arrow[d] & (N^\dagger)^{\varphi=1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (M^\dagger_{\mathrm{tors}}/\mathrm{Im}((\varphi_M - 1)_{|M^\dagger_{\mathrm{tors}}})) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & (M_{\mathrm{tors}})^{\varphi=1} \arrow[r] & M^{\varphi=1} \arrow[r] & N^{\varphi=1} \arrow[r] & (M_{\mathrm{tors}}/\mathrm{Im}((\varphi_M - 1)_{|M_{\mathrm{tors}}})) \end{tikzcd}$$

abelscher Gruppen, wobei die vertikalen Abbildungen den kanonischen Einbettungen entsprechen. Die Abbildung $N^{\varphi=1} \to (M_{\mathrm{tors}}/\mathrm{Im}((\varphi_M - 1)_{|M_{\mathrm{tors}}})$ ist gegeben durch $m + M_{\mathrm{tors}} \mapsto (\varphi_M(m) - m) + \mathrm{Im}((\varphi_M - 1)_{|M_{\mathrm{tors}}})$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Zeilen exakt sind. Nach dem Fünferlemma folgt die zu zeigende Gleichheit $(M^\dagger)^{\varphi=1} = M^{\varphi=1}$ (vergleiche Seite 169 in [Lan05]). □

Bemerkung 5.33

i) Für $M' \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ ist $M := \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M'$ ein endlich erzeugter $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul. Die Abbildung $\varphi \times \varphi_{M'}\colon \tilde{\mathbb{A}}_L \times M' \to \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M'$ ist $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-balanciert, da $\varphi_{M'}$ φ-semilinear ist, sodass wir $\varphi_M := \varphi \otimes \varphi_{M'}$ setzen können. Zusammen mit φ und $\varphi_{M'}$ ist diese bijektiv, sodass $M \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ gilt. Wir erhalten daher Funktoren zwischen den Kategorien $\mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ und $\mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$.

ii) Wir stellen fest, dass der $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul $\underline{Hom}(M,N) = Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(M,N)$ der $\tilde{\mathbb{A}}_L$-linearen Abbildungen zwischen zwei étalen φ-Moduln M,N über $\tilde{\mathbb{A}}_L$ ebenfalls ein Objekt der Kategorie $\mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ ist. Die φ-semilineare Abbildung ist dabei gegeben via $f \mapsto \varphi_N \circ f \circ \varphi_M^{-1}$. Da φ_N und φ_M bijektiv sind, ist auch $\varphi_{\underline{Hom}(M,N)}$ bijektiv. Wir nutzen nun aus, dass M endlich erzeugt ist, und finden eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker\theta \to \tilde{\mathbb{A}}_L^d \xrightarrow{\theta} M \to 0.$$

Daher ist $\underline{Hom}(M,N) \cong Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\tilde{\mathbb{A}}_L^d/\ker\theta, N)$ ein $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Untermodul des endlich erzeugten Moduls $Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\tilde{\mathbb{A}}_L^d, N)$, also selber endlich erzeugt, da $\tilde{\mathbb{A}}_L$ noethersch ist. Wir können nun unsere Resultate auch auf $\underline{Hom}(M,N)$ anwenden und finden so $(\underline{Hom}(M,N)^\dagger)^{\varphi=1} = \underline{Hom}(M,N)^{\varphi=1}$. Weiter ist $f \in \underline{Hom}(M,N)^{\varphi=1}$ genau dann, wenn $\varphi_N \circ f \circ \varphi_M^{-1} = f$, also $\varphi_N \circ f = f \circ \varphi_M$. Also $\underline{Hom}(M,N)^{\varphi=1} = Hom_\varphi(M,N)$.

Lemma 5.34

Für $M,N \in \mathrm{Mod}_\varphi^{ét}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ ist $\underline{Hom}(M,N)^\dagger = \underline{Hom}(M^\dagger,N^\dagger) = Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger)$.

Beweis: Mit einer analogen Argumentation wie in Bemerkung 5.33 sehen wir

$$\underline{Hom}(M^\dagger,N^\dagger) = Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger) \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger).$$

Daher genügt es aufgrund der Eindeutigkeit in Korollar 5.29 zu zeigen, dass

$$\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger) \cong Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(M,N) \cong Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger, \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger)$$

gilt. Nehmen wir erneut an, dass $M = M^\dagger$ ein Torsionsmodul ist, also dass $n \geq 1$ mit $\pi^n M = 0 = \pi^n M^\dagger$ existiert. Dann ist auch $\pi^n Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger) = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger) &= \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} (Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger)/\pi^n Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger)) \\
&\cong \tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} (Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger)/\pi^n Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger)) \\
&\cong Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger)/\pi^n Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger) \\
&= Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger) \\
&= Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger,N^\dagger) \\
&= Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L}(M^\dagger,N^\dagger) \\
&= Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(M^\dagger,N^\dagger) \\
&= Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(M,N).
\end{aligned}$$

Dabei nutzen wir im letzten Schritt aus, dass das Bild einer $\tilde{\mathbb{A}}_L$-linearen Abbildung von $M = M_{\text{tors}} = M^\dagger$ nach N bereits in $N_{\text{tors}} = N_{\text{tors}}^\dagger \subseteq N^\dagger$ liegt.

Ist nun $M \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ torsionsfrei, also frei, so ist auch $M^\dagger \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ frei mit $\mathrm{rk}_{\tilde{\mathbb{A}}_L} \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}$

$M^\dagger = \mathrm{rk}_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$ und daher $M^\dagger = \oplus_{i=1}^d \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ und $M = \oplus_{i=1}^d \tilde{\mathbb{A}}_L$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger, N^\dagger) &= \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(\oplus_{i=1}^d \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger, N^\dagger) \\
&= \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} (\oplus_{i=1}^d Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger, N^\dagger)) \\
&= \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} \oplus_{i=1}^d N^\dagger \\
&= \oplus_{i=1}^d (\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger) \\
&= \oplus_{i=1}^d (Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\tilde{\mathbb{A}}_L, \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger)) \\
&= Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\oplus_{i=1}^d \tilde{\mathbb{A}}_L, \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger) \\
&= Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger, \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger),
\end{aligned}$$

also ebenfalls die Aussage.

Für beliebiges $M \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ schreiben wir $M^\dagger = M_{\text{tors}}^\dagger \oplus M'^\dagger$ mit $M'^\dagger$ frei über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ (vergleiche Beweis von 5.29). Wir erhalten die Isomorphien abelscher Gruppen

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M^\dagger, N^\dagger) &\cong \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M_{\text{tors}}^\dagger \oplus M'^\dagger, N^\dagger) \\
&\cong \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} (Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M_{\text{tors}}^\dagger, N^\dagger) \oplus Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M'^\dagger, N^\dagger)) \\
&\cong (\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M_{\text{tors}}^\dagger, N^\dagger)) \oplus (\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger}(M'^\dagger, N^\dagger)) \\
&\cong Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M_{\text{tors}}^\dagger, \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger) \oplus Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M'^\dagger, \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger) \\
&\cong Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}((\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M_{\text{tors}}^\dagger) \oplus (\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M'^\dagger), \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger) \\
&\cong Hom_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger, \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} N^\dagger).
\end{aligned}$$

Dabei wird ein einfacher Tensor $x \otimes f$ auf die Abbildung $x \cdot \_ \otimes f$ geschickt. Diese Zuweisung ist auch $\tilde{\mathbb{A}}_L$-linear. □

5.5 Der Beweis des Hauptsatzes

Wir haben nun die Vorarbeit für die Hauptresultate abgeschlossen und können nun die Γ-Operation mit einfließen lassen. Zunächst benötigen wir noch weitere Resultate bezüglich der schwachen Topologie und der Γ-Operation.

Lemma 5.35

i) Sind M, M_1, M_2 endlich erzeugte $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Moduln mit $M = M_1 \oplus M_2$, so entspricht die schwache Topologie auf M der Produkttopologie der schwachen Topologien auf M_i.

ii) Ist $M \in \mathrm{Mod}_\varphi^{ét}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$, so entspricht die $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-schwache Topologie auf $M^\dagger$ der Teilraumtopologie auf $M^\dagger \subseteq M$, wenn wir M mit der $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwachen Topologie ausstatten.

iii) Ist $M^\dagger \in \mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}^{ét}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$, so operiert Γ diagonal auf $M := \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$ und diese Operation ist stetig bzgl. der $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwachen Topologie auf M.

Beweis: Für i) wählen wir Projektionen $\tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d} \twoheadrightarrow M_1$ und $\tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger e} \twoheadrightarrow M_2$ und erhalten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d+e} \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[d, two heads] & \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d} \oplus \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger e} \arrow[d, two heads] \\ M \arrow[r, equal] & M_1 \oplus M_2, \end{tikzcd}$$

woraus die Aussage folgt, da der obige horizontale Isomorphismus ein Isomorphismus von topologischen Räumen ist.

Für ii) betrachten wir zunächst den Fall, dass M ein Torsionsmodul ist. Wir finden also $n \in \mathbb{N}$ mit $\pi^n M = 0$. Wegen $M^\dagger = M$ müssen wir nun zeigen, dass die $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwache Topologie auf M gleich der $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-schwachen Topologie auf M ist. Dabei wird M via $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \to \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L$ zu einem endlich erzeugten $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Modul. Wir finden also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{A}}_L^{d} \arrow[r, two heads] & \tilde{\mathbb{A}}_L^{d}/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^{d} \arrow[r, two heads] & M \\ \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d}/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d} \arrow[u, equal, "\wr"'] \arrow[r, two heads] & M^\dagger. \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

Es genügt also zu zeigen, dass auf $\tilde{\mathbb{A}}_L^{d}/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^{d}$ die $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwache Topologie mit der $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-schwachen Topologie übereinstimmt. Weiter können wir nach Teil i) ohne Einschränkung $d = 1$ annehmen. Sei $U \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$, sodass das Bild $\overline{U} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L$ $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwach offen ist. Das bedeutet, dass $U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L$ offen ist und es gilt $(U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L) \cap \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger = U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ nach Proposition 5.15. Da $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L$ mit der Teilraumtopologie ausgestattet wird, ist $U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ offen in $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$. Das zeigt, dass $\overline{U} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L$ $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-schwach offen ist.

Ist andererseits $U \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ mit $\overline{U} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L$ schwach offen bzgl. der Quotiententopologie $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \twoheadrightarrow \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}_L/\pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L$, so ist $U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ offen. Es gibt also $O \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L$ offen mit $U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger = O \cap \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$. Für $x \in U \subseteq O$ finden wir eine natürliche Zahl $m \geq n$ (und $\alpha \in W(\mathfrak{o}_F)_L$ mit $0 < |\Phi_0(\alpha)|_\flat < 1$) mit $x + \alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^m W(F)_L \subseteq O$. Da sowohl x als auch $\alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L$ in $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ liegen, ist

$$x + \alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L \subseteq (x + \alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^m\tilde{\mathbb{A}}_L) \cap \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger = x + \alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^m\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \subseteq O \cap \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger = U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L.$$

Insbesondere ist für $y \in \tilde{\mathbb{A}}_L$

$$(x + \pi^n y) + \alpha^m W(\mathfrak{o}_F)_L + \pi^m\tilde{\mathbb{A}}_L \subseteq \pi^n y + U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L + \pi^m\tilde{\mathbb{A}}_L \subseteq U + \pi^n\tilde{\mathbb{A}}_L,$$

also ist $\overline{U}$ offen bzgl. der $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwachen Topologie.

Ist nun M torsionsfrei (also frei) über $\tilde{\mathbb{A}}_L$, so finden wir Isomorphismen

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{A}}_L^{d} \arrow[r, "\sim"] & M \\ \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & M^\dagger. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Die Aussage ist dann klar, da $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L$ mit der Teilraumtopologie ausgestattet ist.

Für beliebiges $M \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ schreiben wir $M = M_{\text{tors}} \oplus M'$, wobei $M' \subseteq M$ ein freier $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul ist. Die Aussage folgt dann aus Teil i).

Für iii) zerlegen wir $M^\dagger$ erneut in $M^\dagger = M_{\text{tors}}^\dagger \oplus M'^\dagger$, wobei auch hier $M_{\text{tors}}^\dagger, M'^\dagger \in \mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ sind und $M'^\dagger$ über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ frei ist. Es genügt erneut, die Aussage für $M_{\text{tors}}^\dagger$ und $M'^\dagger$ zu zeigen. Für $M_{\text{tors}}^\dagger$ ist die Aussage klar, da in diesem Fall $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M_{\text{tors}}^\dagger = M_{\text{tors}}^\dagger$ ist und die $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwache Topologie auf M_{tors} der $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-schwachen Topologie auf $M_{\text{tors}}^\dagger$ entspricht.

Sei also $M^\dagger \in \mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ frei über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$. Wir finden einen Isomorphismus von $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$-Moduln $\tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d} \cong M^\dagger$. Insbesondere ist dies ein Isomorphismus topologischer Räume nach Bemerkung 4.10ii). Nun ist die diagonale Γ-Operation unter dem Isomorphismus $\tilde{\mathbb{A}}_L^d \cong \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d}$ gegeben durch

$$(\gamma, \sum_{i=1}^d a_i e_i) \mapsto \sum_{i=1}^d \gamma(a_i)\gamma(e_i).$$

Wir erhalten für $j \in \{1, \ldots, d\}$ die stetigen Abbildungen

$$((\gamma, \sum_{i=1}^d a_i e_i) \mapsto (\gamma, e_j) \mapsto \gamma(e_j)) \colon \Gamma \times \tilde{\mathbb{A}}_L^d \to \Gamma \times \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d} \to \tilde{\mathbb{A}}_L^{\dagger d} \subseteq \tilde{\mathbb{A}}_L^d$$

und

$$((\gamma, \sum_{i=1}^d a_i e_i) \mapsto (\gamma, a_j) \mapsto \gamma(a_j)) \colon \Gamma \times \tilde{\mathbb{A}}_L^d \to \Gamma \times \tilde{\mathbb{A}}_L \to \tilde{\mathbb{A}}_L.$$

Weiter ist nach Bemerkung 4.10 sowohl die Multiplikation $\tilde{\mathbb{A}}_L \times \tilde{\mathbb{A}}_L^d \to \tilde{\mathbb{A}}_L^d$ als auch die Summation $\tilde{\mathbb{A}}_L^d \times \tilde{\mathbb{A}}_L^d \to \tilde{\mathbb{A}}_L^d$ stetig bezüglich der $\tilde{\mathbb{A}}_L$-schwachen Topologie, sodass insgesamt $\Gamma \times \tilde{\mathbb{A}}_L^d \to \tilde{\mathbb{A}}_L^d$ eine stetige Abbildung ist. □

Proposition 5.36 (de Shalit/Porat)

i) Die Funktoren $M^\dagger \mapsto M := \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$ und $M \mapsto M^\dagger$ induzieren eine Äquivalenz zwischen den Kategorien $\mathrm{Mod}_\varphi^{ét}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ und $\mathrm{Mod}_\varphi^{ét}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$.

ii) Sei $V \in \mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ eine stetige Darstellung von G. Dann ist $M^\dagger$ für $M := \mathbb{D}(V) = (\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H \in \mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}^{ét}(\tilde{\mathbb{A}}_L) \subseteq \mathrm{Mod}_\varphi^{ét}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$ gegeben durch $M^\dagger = (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H$.

Beweis: Zunächst ist nach Konstruktion für $M \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$

$$\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \cong M.$$

Andererseits ist nach Bemerkung 5.26 $\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$ für $M^\dagger \in \mathrm{Mod}_\varphi^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$ ein $\tilde{\mathbb{A}}_L$-Modul, der $M^\dagger$ enthält. Aus der Eindeutigkeit in Korollar 5.29 erhalten wir

$$\left(\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger\right)^\dagger = M^\dagger.$$

Die Funktoren $M \mapsto M^\dagger$ und $M^\dagger \mapsto \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$ sind also quasi-invers auf den Objekten der jeweiligen

Kategorien. Weiter haben wir (vergleiche auch Bemerkung 5.33)

$$\begin{aligned} Hom_\varphi(M,N) &= \underline{Hom}(M,N)^{\varphi=1} \underset{5.31}{=} (\underline{Hom}(M,N)^\dagger)^{\varphi=1} \underset{5.34}{=} \underline{Hom}(M^\dagger,N^\dagger)^{\varphi=1} \\ &= Hom_\varphi(M^\dagger,N^\dagger). \end{aligned}$$

Für ii) haben wir bemerkt, dass die Aussagen in 5.22 und 5.29 gültig sind, wenn wir $\tilde{\mathbb{A}}_L$ durch $\tilde{\mathbb{A}}$ ersetzen. Sei nun $V \in \mathrm{Rep}_{\mathfrak{o}}(G)$ und sei $M := \mathbb{D}(V) = (\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H \in \mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L) \subseteq \mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$. Wir erhalten einen G-invarianten Isomorphismus von (étalen) φ-Moduln $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M = \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} \mathbb{D}(V) \cong \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V$ über $\tilde{\mathbb{A}}$ (vergleiche Lemma 4.14).

Wir wollen nun zeigen, dass unter diesem Isomorphismus auch $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V$ gilt, wobei wir diese Moduln via $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}^\dagger} (\_)$ als Untermoduln von $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V$ auffassen (vergleiche für diese Einbettung auch mit Bemerkung 5.26). Zunächst ist $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$ ein endlich erzeugter étaler φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$ mit φ-semilinearer Abbildung $\varphi \otimes \varphi_{M^\dagger}$. Außerdem haben wir den Isomorphismus von φ-Moduln

$$\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}^\dagger} (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger) \cong \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} (\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger) \cong \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M$$

über $\tilde{\mathbb{A}}$. Es gilt also $(\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L} M)^\dagger = \tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$.

Andererseits ist $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V$ ein endlicher erzeugter étaler φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}^\dagger$ via $\varphi \otimes id$ und wir haben den Isomorphismus von φ-Moduln

$$\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}^\dagger} (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V) \cong \tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V.$$

Insbesondere gilt $(\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V)^\dagger = \tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V$. Aus der Eindeutigkeit in Korollar 5.29 folgt

$$\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger \cong \tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V.$$

Da dieser Isomorphismus G-invariant ist, erhalten wir insbesondere $(\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger)^H \cong (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H \subseteq \mathbb{D}(V) = M$. Es bleibt also zu zeigen, dass unter diesem Isomorphismus $(\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger)^H \cong (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H \cong M^\dagger$ gilt. Im Fall $\pi^n V = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $\pi^n M = 0$ und daher $M^\dagger = M = (\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H = (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H$ nach Korollar 5.17. Ist andererseits V torsionsfrei, so ist auch M torsionsfrei und damit frei. Wir finden erneut $d \in \mathbb{N}$ mit $M^\dagger \cong (\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)^d$. Da H auf $M^\dagger$ trivial operiert, erhalten wir $(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H \cong (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger)^H \cong [(\tilde{\mathbb{A}}^\dagger)^d]^H \cong (\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)^d \cong M^\dagger$. Für ein beliebiges V ziehen wir uns erneut durch die Zerlegung in eine direkte Summe auf die beiden obigen Fälle zurück. □

Beweis: (von Satz 5.21)
Sei zunächst $M^\dagger \in \mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$. Auf dem endlich erzeugten étalen φ-Modul $M := \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} M^\dagger$ über $\tilde{\mathbb{A}}_L$ operiert Γ diagonal und stetig (siehe 5.35). Diese Operation ist in natürlicher Weise Γ-semilinear. Außerdem kommutiert Γ mit $\varphi_M = \varphi \otimes \varphi_{M^\dagger}$, da die Operation mit $\varphi_{M^\dagger}$ und mit φ kommutiert. Daher ist $M \in \mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$.

Ist andererseits $M \in \mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi,\Gamma}(\tilde{\mathbb{A}}_L) \subseteq \mathrm{Mod}^{\text{ét}}_{\varphi}(\tilde{\mathbb{A}}_L)$, so ist für $\gamma \in \Gamma$ der φ-Untermodul $\gamma(M^\dagger) \subseteq M$

noch immer ein endlich erzeugter, étaler φ-Modul über $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger = \gamma(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$, der wegen

$$\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} \gamma(M^\dagger) = \mathrm{span}_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(\gamma(M^\dagger)) = \gamma(\mathrm{span}_{\tilde{\mathbb{A}}_L}(M^\dagger)) = \gamma(M) = M$$

ebenfalls die Bedingungen aus Lemma 5.22 erfüllt. Aus der Eindeutigkeit erhalten wir $\gamma(M^\dagger) = M^\dagger$, also schränkt sich die Γ-Operation von M auf $M^\dagger$ ein. Weiter ist die Γ-Operation auf $M^\dagger$ stetig, wenn wir $M^\dagger$ mit der schwachen Topologie bzgl. $\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger$ bzw. äquivalent mit der Teilraumtopologie von M ausstatten (vgl. Lemma 5.35). Damit ist $M^\dagger \in \mathrm{Mod}_{\varphi,\Gamma}^{\text{ét}}(\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger)$.

Ein Morphismus von (φ, Γ)-Moduln ist ein Morphismus von φ-Moduln mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass er mit der Γ-Operation kommutiert. In Proposition 5.36 haben wir bereits $\mathrm{Hom}_\varphi(M, N) = \mathrm{Hom}_\varphi(M^\dagger, N^\dagger)$ gesehen, sodass insbesondere die Homomorphismen der (φ, Γ)-Moduln übereinstimmen.

Die zweite Aussage von Satz 5.21 folgt nun direkt, indem wir die Funktoren aus 5.21i) und 5.36i) verketten. Dann ergibt sich

$$\mathbb{D}^\dagger(V) = (\tilde{\mathbb{A}}^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H = ((\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H)^\dagger = \mathbb{D}(V)^\dagger$$

und daher auch

$$\tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} \mathbb{D}^\dagger(V) = \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger} \mathbb{D}(V)^\dagger \cong \mathbb{D}(V).$$

Dies beendet den Beweis. □

Beispiel 5.37

Sei V eine freie stetige $\mathfrak{o}$-Darstellung von $G = \mathrm{Gal}(\overline{L}|L)$ vom Rang 1. Sei $\chi: G \to Aut_{\mathfrak{o}}(V) \cong \mathfrak{o}^*$ der Homomorphismus zur Gruppenoperation von G auf V. Da $\mathfrak{o}^*$ abelsch ist, faktorisiert χ über $G/H = \mathrm{Gal}(L^{ab}|L)$. Insbesondere ist $\sigma(v) = v$ für alle $v \in V$ und $\sigma \in H$. Ist $v \in V$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von V, so ist $1 \otimes v$ eine $\tilde{\mathbb{A}}$-Basis von $\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V$. Ist $a \in \tilde{\mathbb{A}}$, $\sigma \in H$ und $\sigma(a \cdot (1 \otimes v)) = a \cdot (1 \otimes v)$, so folgt $a = \sigma(a)$. Wir erhalten $\mathbb{D}(V) = (\tilde{\mathbb{A}} \otimes_{\mathfrak{o}} V)^H = \tilde{\mathbb{A}}^H \otimes_{\mathfrak{o}} V = \tilde{\mathbb{A}}_L \otimes_{\mathfrak{o}} V$ und $\mathbb{D}^\dagger(V) = \tilde{\mathbb{A}}_L^\dagger \otimes_{\mathfrak{o}} V$. In diesem Sinne sind alle freien stetigen $\mathfrak{o}$-Darstellungen vom Rang 1 trivialerweise überkonvergent.

Bemerkung 5.38

Für die Konstruktion weiterer nicht-trivialer Beispiele sei an dieser Stelle nur verwiesen. Dafür betrachtet man Tate-Moduln über elliptischen Kurven, siehe zum Beispiel Abschnitt 1.1.4 (2) in [FonOuy].

Literatur

[CheCol] Frédéric Cherbonnier und Pierre Colmez. *Représentations p-adiques surconvergentes*. https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/CCinv.pdf (zuletzt aufgerufen am 12.06.2019).

[FarFon] Laurent Fargues und Jean-Marc Fontaine. *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique*. https://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/Courbe_fichier_principal.pdf (zuletzt aufgerufen am 12.06.2019).

[Fon] Jean-Marc Fontaine. *Représentations p-adiques des corps locaux*. The Grothendieck Festschrift Vol. II. Progress Math. 87, (1990), S. 249-309.

[FonOuy] Jean-Marc Fontaine und Yi Ouyang. *Theory of p-adic Galois Representation*. https://www.math.u-psud.fr/~fontaine/galoisrep.pdf (zuletzt aufgerufen am 12.06.2019).

[FouXie] Lionel Fourquaux und Bingyong Xie. *Triangulable $\mathfrak{o}_F$-analytic (φ_q,Γ)-modules of rank 2*. https://arxiv.org/pdf/1206.2102.pdf (zuletzt aufgerufen am 12.06.2019).

[Ked] Kiran S. Kedlaya. *New Methods for (φ,Γ)-Modules*. https://arxiv.org/pdf/1307.2937.pdf (zuletzt aufgerufen am 12.06.2019).

[Lan05] Serge Lang. *Algebra - überarbeitete 3. Auflage.* Springer, Berlin; Heidelberg; New York, 2005.

[Neu92] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1992.

[ShaPor] Ehud de Shalit und Gal Porat. *Induction and restriction on (φ,Γ)-modules.* https://arxiv.org/pdf/1805.08103.pdf (zuletzt aufgerufen am 12.06.2019).

[Sch17] Peter Schneider. *Galois Representations and (φ,Γ)-Modules.* Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[Scho] Peter Scholze. *Perfectoid Spaces*. Publ. Math. IHES 116, (2012), S. 245-313.

Versicherung an Eides Statt

Ich versichere an Eides statt durch meine untenstehende Unterschrift,

- dass ich die vorliegende Arbeit - mit Ausnahme der Anleitung durch die Betreuer - selbstständig ohne fremde Hilfe angefertigt habe und
- dass ich alle Stellen, die wörtlich oder annähernd wörtlich aus fremden Quellen entnommen sind, entsprechend als Zitate gekennzeichnet habe und
- dass ich ausschließlich die angegebenen Quellen (Literatur, Internetseiten, sonstige Hilfsmittel) verwendet habe und
- dass ich alle entsprechenden Angaben nach bestem Wissen und Gewissen vorgenommen habe, dass sie der Wahrheit entsprechen und dass ich nichts verschwiegen habe.

Mir ist bekannt, dass eine falsche Versicherung an Eides Statt nach §156 und nach §163 Abs. 1 des Strafgesetzbuches mit Freiheitsstrafe oder Geldstrafe bestraft wird.

Ort, Datum	Unterschrift